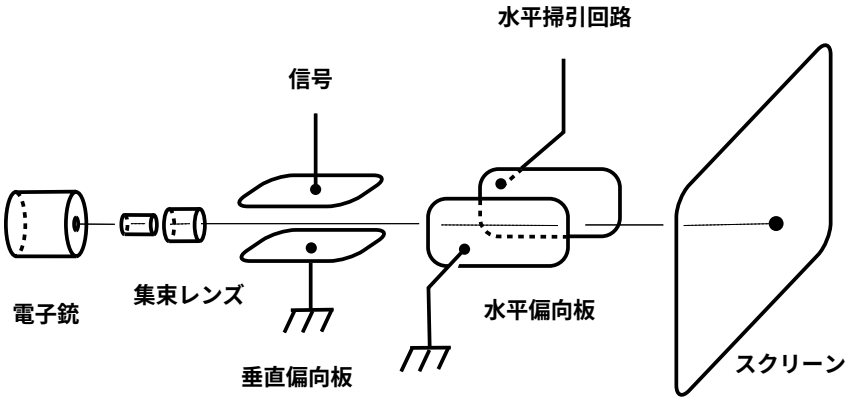
4章　微分

Introduction 4　オシロスコープの原理

オシロスコープが電子工学では大切な実験装置であることを，リサジュー図形のところで述べました．オシロスコープは電子の運動を利用した電子機器の代表選手の一つ，といって過言ではありません．オシロスコープは大まかには電子銃，電子線集束レンズ，垂直偏向板，水平偏向板，スクリーンの５つで構成されています．

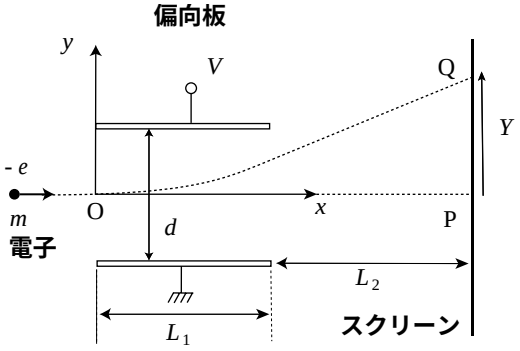


電子銃は電子を打ち出す装置です．電子銃から飛び出した電子の方向は，すべて真っ直ぐではありません．なかには斜めの方向にでてくる電子もいます．この斜めの方向に飛び出した電子を真っ直ぐな方向に，その運動の方向を修正するのが集束レンズの役割です．集束レンズを経過したあとは，電子の運動方向は殆ど真っ直ぐになります．

次に電子は２つの偏向板の間を通過します．偏向板に電圧がかかっていなければ，電子は何の力も受けないので直進運動を続けます．そしてスクリーンに衝突します．スクリーンには蛍光物質が塗ってあり，電子の衝突した位置が光るようになっています．スクリーンに輝点が観測されるのです．

もしも偏向板に電圧がかかっていると，電子には電気力が作用して，電子の運動方向に変化が生じます．そして，スクリーンでの衝突位置が，電圧がかかっていない場合とは異なることになります．輝点のズレた距離と偏向板にかかった電圧との間の関係がわかれば，ズレの距離を実測して，かかった電圧の値が特定できるようになるのです．

電子に限らず粒子の運動を調べるには，運動方程式が出発点になります．運動方程式を最初に提唱したのは，万有引力で有名なニュートンです．運動方程式は微分を用いて表現されます．電子の質量を m，電荷を $-e$（自然定数ではありません），偏向板にかかっている電圧を V として，時間を t とすると，偏向板の間に位置する電子の運動方程式は



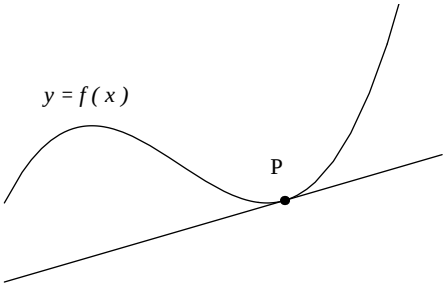
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{eV}{d}$$

で与えられます．ここで，x は偏向板への入射方向の位置，y は垂直方向の位置であり，d は偏向板の間の間隔です．このような微分された変数が未知数となっている方程式は，微分方程式と呼ばれます．輝点の位置と偏向板にかかる電圧の間の関係を調べるには，この微分方程式を解かなければなりません．もちろん，もとになる微分という考え方そのものをしっかりと理解しておかなければ，微分方程式も解けません．

時間とともに変動する現象を調べるときには，微分という考え方がどうしても必要になります．変化の速さの程度を表現する手段が微分そのものだからです．従って，微分の考え方は，避けて通れないのです．しっかりとした知識を身につけておく必要があります．

輝点の位置と偏向板にかかる電圧の関係式は，この章の内容を理解してもらった段階で説明することにします．お楽しみに．

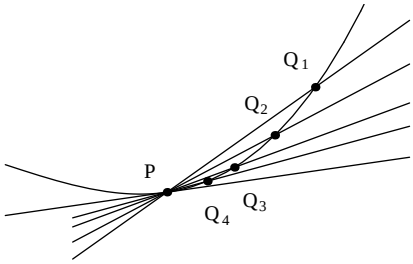
4.1　接線の傾きと微分の定義　－多項式の微分 －

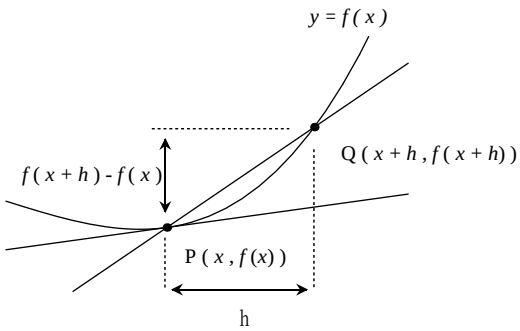


最初に，右の図に示すような曲線を与える関数 $y=f(x)$ があったとして，その曲線上の一つの点 P における接線の傾きを求める問題に挑戦してみましょう．直線定規を使って，目分量で接線をひいてしまうと，得られた接線は不正確きわまりません．直線定規は，本来，異なる 2 点を通る直線を作図するための道具なのですから，1 点で“接する”直線を求めるのには不適切なのです．しかしながら，原理的には次のようにすれば，正確な接線に近づけます．

点 P とは異なる点 Q を曲線上に選んで，P と Q を通る直線を引きます．当然ながら，この直線は P での接線ではありません．しかし，Q を $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ と限りなく P に近づけていくと，P と Q を通る直線は P での接線に近づいていきます．ここで，『Q を P に一致

させる』と言っていないところに注意を払って下さい．あくまでも『QをPに限りなく近づける』のです．





直線の傾きの定義を思い出して下さい．直線の傾き（勾配ともいいます）は，その直線上にある基準点(x,y)から直線に沿ってx軸方向へΔxだけ移動したときに生じる関数値の変動値Δyを用いて，$\Delta y / \Delta x$で定義されます．従って，その2点を通る直線の傾きを与える式で，PとQが重ならない限りΔxはゼロにならず，Δxでの割り算が可能となります．今，上の図のようにΔxをhで表すと，$\Delta y = f(x+h) - f(x)$なので，

$$（\text{PとQを通る直線の傾き}）= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4.1}$$

で与えられます．なお，式(4.1)は，PとQが重なるとhがゼロとなってしまい，意味を失ってしまいます．

さて，接線の傾きを求める方式として，『QをPに限りなく近づける』としました．しかしながら，式(4.1)のままでは『限りなく近づける』という“精神”が入っていません．『限りなく近づける』を入れるために，$h \to 0$をつけて，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h \to 0) \tag{4.2}$$

あるいは$\lim_{h \to 0}$をつけて，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4.3}$$

と書き表す約束となっています．

記号「lim」はラテン語で極限を意味する“limes”に起源を発しています．英語では“limit”ですから，通常は“リミット”と読みますが，なかにはラテン語風に，“リーメス”と読む人もいます．

ゼロの極限をとるということはくどいようですが，0とすることではありません．hを

０に近づけると，分母と分子の双方がいくらでも０に近づきますが，その比は一定の値に収束していきます．このことを確認するために，次の設問に答えてみて下さい．

［設問 4.1］　$y=x^2$ の $x=2$ における接線の傾きは $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$ で与えられる．下の表の空欄を計算して埋め，この極限が一定値に近づくことを確かめなさい．

h	1	0.1	0.01	0.001	0.001
$(2+h)^2-2^2$					
$\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$					

これで $\lim_{h\to 0}$ の意味が分かったと思いますが，いつもこのような計算をしていたのでは大変です．数式の計算で，正しくこの比の極限を求める方法を考えてみましょう．次の設問に沿って考えて下さい．

［設問 4.2］

(1) $f(x)=x^2$ として，$f(x+h)-f(x)$ を h, h^2 の順に整理しなさい．h, h^2 の順に整理することを昇べきの順と呼んでいます．

(2) $\{f(x+h)-f(x)\}/h$ を計算して，h の昇べきの順に整理しなさい．

(3) 上の設問(2)で得られた表式で $h=0$ としなさい．

上の設問の最終解答は $2x$ です．この結果を得る途中の経過は，式(4.2)や式(4.3)の計算法に対して，１つの方式を与えてくれています．まとめておくと，次のようになります．

① $f(x+h)-f(x)$ を“キッチリ”計算して，h の昇べきの順に整理する．そして，h の１次から始まることを確認する．

① $\{f(x+h)-f(x)\}/h$ を計算（h での割り算）する．

① h での割り算のあとで，$h=0$ とする．

ここで大切なことは，h での割り算のあとで $h=0$ としていることです．これで $\frac{0}{0}$ になることから免れているのです．

関数 $y=f(x)$ の x における接線の傾きを求める操作（演算）を微分と呼び，その結果の

式を$f(x)$の導関数と名づけています．導関数をプライム「'」（日本ではダッシュと読むことが多い）をつけて，$f'(x)$と表記すると

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4.4}$$

となります．$f(x)$の導関数を求める操作を，“$f(x)$をxで微分する”とも表現します．

［設問 4.3］　$f(x)=1$として，その導関数を求めなさい．

［設問 4.4］　$f(x)=x$, $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$として，それぞれの導関数を求めなさい．

設問の結果をまとめておきましょう．

$$\begin{aligned}
f(x)&=1 &\to\quad f'(x)&=\\
f(x)&=x &\to\quad f'(x)&=\\
f(x)&=x^2 &\to\quad f'(x)&=\\
f(x)&=x^3 &\to\quad f'(x)&=\\
f(x)&=x^4 &\to\quad f'(x)&=
\end{aligned}$$

この結果より，一般に$n=0,1,2,\cdots$として，$f(x)=x^n$の導関数は$n\,x^{n-1}$となることが予想されます．事実そのようになります．$f(x)=x^n\ (n=0,1,2,\cdots)$のとき，

$$f(x)=x^n\ (n=0,1,2,\cdots)\quad\to\quad f'(x)=n\,x^{n-1} \tag{4.5}$$

この結果は憶えておきましょう．

［設問 4.5］　式(4.5)を証明しなさい．

導関数の表し方と微分

導関数を求める方法を現在では，一括して微分法と呼んでいます．歴史的にみますと，微分法は力学に関連してニュートンが創出しました．また，ほんの少し遅れて，ライプニッツが独立に考案しました．ニュートンの用いた記号では，導関数を従属変数の上に小さな点をつけて表します．例えば，tの関数$x(t)$のtに関する導関数を$\dot{x}$や$\dot{x}(t)$のように．この表し方は，現在では力学の分野で少し見かけるだけで，主流でないといって良いでしょう．ニュートン自身は彼が考案した微分法を流率法と呼んでいたのです．

ライプニッツの記号では，$y=f(x)$の導関数は$\dfrac{dy}{dx}$や$\dfrac{d}{dx}y$と表現されます．もちろん，

$\frac{df(x)}{dx}$や$\frac{d}{dx}f(x)$と同じことです．dxには，xをほんの少し（数学では無限小）だけ変化させたときの増分，という意味を持たせています．そこで，『ほんの少しの増分』，『微々たる増分』ということで，dxをxの微分と呼ぶようになったのです．式(4.4)で，限りなくゼロに近づけたときのhと同じ意味であるといえます．$\frac{dy}{dx}$の書き方でのdyは，dxに応じた関数値の微少増分$dy = f(x+dx) - f(x)$（式(4.4)の分子）を意味し，$\frac{dy}{dx}$は文字どおりdyとdxの比を意味します．このdxやdyという微分を使うと，柔軟な表現法が可能になります．$y = f(x)$のとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{4.6a}$$

を

$$dy = f'(x)dx \tag{4.6b}$$

と書くことができるのです．導関数$f'(x)$のことを「微分係数」や「微係数」と呼んだりしますが，この(4.6b)式がその根拠なのです．また，(4.6a)式は微分どうしの商になっているで，「微分商」ともいわれます．蛇足ながら，dxは決して，$d \times x$ではありません．従って，くれぐれも$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$としないでください．

導関数を求める演算全体をイメージした表現法は，$\frac{d}{dx}y$や$\frac{d}{dx}f(x)$です．すなわち，$\frac{d}{dx}$を導関数を求める演算と解釈するのです．

ライプニッツが用いた記号はうまく構成されています．式(4.4)での極限をとるとの操作をdに含ませることによって，微分という概念が意識できるようになっています．それ故に，ライプニッツの記号が現在の主流になっています．

［設問 4.6］　次の関数で$\frac{dy}{dx}$を求めよ．

（1）$y = 2x - 1$　　（2）$y = -3x^2 + 4x + 5$　　（3）$y = 2(x+1)^3$

ニュートンやライプニッツが考案した微分法は，最初からすんなりと受け入れられたわけではありません．厳密性が大事と考える一部の数学者達には，懐疑の目で迎えられました．無限小を扱う厳密な手法が確立していなかったからです．しかしながら，力学の分野での微分法の威力を見せつけられると，受け入れざるを得なくなったのです．例えば，ケプラーは火星の楕円軌道を計算するのに５年の歳月を要しましたが，ニュートンの微分法を使うと，瞬時とはいきませんがすぐに計算ができるのです．当時の数学者の姿勢の一端を示す言葉を紹介しておきます．

「間違いと間違いが打ち消して，うまくいっているのだろう．」

「いつか，正しいことがしめされるだろう．」

ニュートンやライプニッツのほぼ 100 年後に，コーシーが厳密な無限小の扱い方を確立して，やっと厳密派の批判もなくなりました．ちなみにコーシーは導関数を求める演算記号として D をつかい，$y=f(x)$ の導関数を $D_x y$ や $D_x f(x)$ のように書き表していました．プライム「'」を使ったのはラグランジュです．日本では「'」をダッシュと読みますが，正確にはプライムです．

高階の微分

関数 $y=f(x)$ を 1 回だけでなく，2 回 3 回・・・と続けて微分する必要がでてくる場合もあります．そのような場合は，独立変数を x とすると記号 $\frac{d}{dx}$ を微分する回数だけ重ねた書き方や，プライム「'」（日本ではダッシュと読むことが多い）を続ける書き方が一般的です．次のようになります．

微分を 1 回おこなう：　$\frac{d}{dx}y$　，　$\frac{dy}{dx}$　，　y'

微分を 2 回おこなう：　$\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}y)=\frac{d^2}{dx^2}y$　，　$\frac{d^2y}{dx^2}$　，　y''

ここで，$(dx)^2=dx^2$ と表記しています．これは以前にも注意したように，dx は $d\times x$ ではなくて，dx で一つの量を表しているからです．

ここで言葉の使い方について注意をしておきます．微分して得られた関数を導関数と呼んでいました．これにはある関数から，微分という演算を行って新しい関数を導いたという意識が入っています．英語では導関数のことを derived function や derivative と呼んでいます．derive は導くとの意味です．微分を続けて行うと，もととなる関数を土台にして次々に新しい関数が得られていきます．そこで，$\frac{d}{dx}y$ を 1 階微分，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を 2 階微分のように呼ぶ習わしになっています．「かい」には回でなく，階を用います．以後，間違わないで下さい．

［設問 4.7］　次に示す x の関数 $f(x)$ の 2 階微分を求めなさい．

(i)　$f(x)=3x^2-2x+1$

(ii)　$f(x)=-4x^3-3x^2+2x+2$

(iii)　$f(x)=5x-1$

(iv)　$f(x)=10$

オシロスコープ再考　　その１

それでは，この章の Introduction 4 で取り上げた問題に解答を与えましょう．しかし，少し準備が必要です．それは運動の法則についての事柄です．ニュートンは物体の運動に

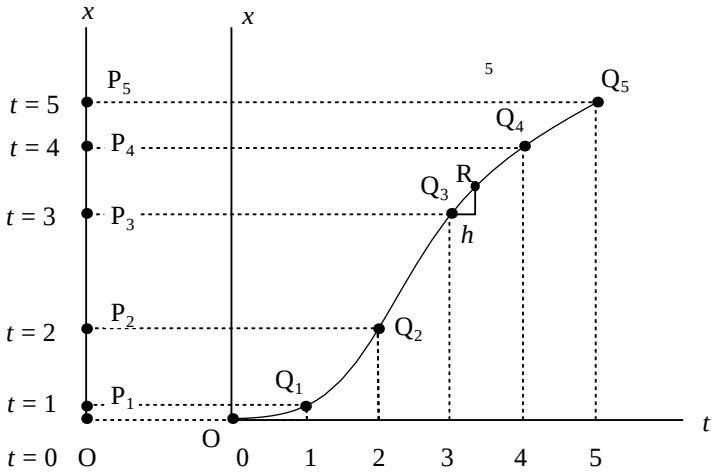
ついて，次の 3 つの法則を提唱しました．

運動の第 1 法則：力の作用を受けていない物体は静止しているか，等速度運動（等速直線運動）を行う．

運動の第 2 法則：力 f を受けた物体は加速される．物体の質量を m，加速度を α として，$f = m\alpha$ である．この $f = m\alpha$ を運動方程式という．

運動の第 3 法則：作用・反作用の法則．（これは 2 つ以上の物体が関係する場合に適用されます．今は必要でないので省略します．説明は物理の講義でしっかりと聴いて下さい．）

そして，速度や加速度を微分を使って表現し，力に万有引力を適用して，天体の運行を見事に説明したのです．



速度が微分を用いて，どのように表現されるのかを考えてみましょう．図を用いて，説明してみます．物体が半直線 Ox 上を正の方向に移動していくとします．時刻ゼロでの物体の位置は原点であったとして，時刻 t での位置をグラフにしたのが，上の図の右に配置された曲線 $x(t)$ であると思って下さい．時間の単位は秒としておきます．速度は

（速度）＝（移動距離）／（移動に要した時間）

で定義されます．時間帯を $t = 0 \sim 5$ に選んだときの速度は定義より $\mathrm{OP}_5 / 5$ となりますが，この数値の図形的な意味はグラフで O と Q_5 を結んだ直線の傾きとなります．同様に，時間帯が $0 \sim 1$ であればと O と Q_1 を結んだ直線の傾きとなります．実際に，図に直線を書き込んでみて下さい．このことより，選んだ時間帯によって速度は違うということがわかります．

ここで微分の登場です．速度を定義する式の分母で，時間幅をどんどん小さくしていったらどうなるか？もちろん移動に要する時間が小さくなるのですから，分子の移動する距離も小さくなります．たとえば，時間帯を $t = 3 \to t = 3 + h$ に選んで，$t = 3 + h$ での物体の位置を R とし，R を Q_3 に近づけるのです．そのとき，選んだ時間帯での速度は $\left\{x(3+h) - x(3)\right\} / h \ (h \to 0)$ となり，これは微分（導関数）の定義そのものです．今の例で

は，たまたま $t=3$ としただけです．従って，時刻 t での速度 $v(t)$ は

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=\frac{d}{dt}x(t) \tag{4.7}$$

となります．これを，速度は位置の時間変化率で定義されると表現します．あるいは，速度は位置の変化の度合いを表しているといえます．

A 君はつい最近自動車の運転免許を取りました．うれしくて，自動車をかりて，ドライブに出かけました．自宅を出て 40 分が経ったとき，制限時速 50km/h の国道で白バイに停車を命じられ，20 キロオーバーの速度違反を告げられてしまいました．

「時速 50km/h とは，1 時間経つと 50km 走るとのことでしょう．私が家をでたのは 40 分前です．しかも，20km しか走っていません．なのに 70km/h のスピードがでていたなんて信じられません！」

A 君のこんな言い訳が通るでしょうか？

ニュートンが偉かったところは，加速度を考えたところにあります．加速度は速度の時間変化率で定義されます．すなわち，加速度を $\alpha(t)$ とすれば，

$$\alpha(t)=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{4.8}$$

となり，位置の時間に関する 2 階微分で与えられます．凡人には速度の変化率までなかなか思い至らないと考えられますが，みなさんはどう思いますか．

運動の方向を 1 次元（直線上の運動）であるとしましょう．ニュートンの運動法則によれば，力 f の作用を受けた物体の質量を m，位置を $x(t)$ として，運動方程式は

$$f=m\frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{4.9}$$

で与えられます．もし力がゼロすなわち，$f=0$ であれば，この方程式は次のようになります．

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t)=0 \tag{4.10}$$

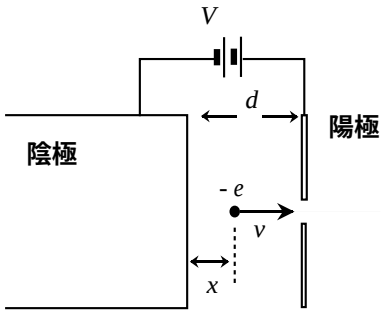
［設問 4.8］　次に示す形の $x(t)$ は(4.10)式を満たすことを確認しなさい．ここで，x_0 と v_0 は定数とします．

$$x(t)=x_0+v_0\,t \tag{4.11}$$

上の設問の結果で $v_0=0$ としてみると，$x(t)=x_0$，すなわち位置は一定値となります．言い換えれば，動かない，物体は静止していることになります．$v_0\neq 0$ であれば $\frac{dx}{dt}=v_0$ と

なり，速度が一定値となります．この内容は運動の第１法則そのものです．運動方程式は第１法則が成立する系（慣性系と呼ばれています）における法則なので，特別の場合として第１法則を含むのは当然のことなのです．

前置きが長くなってしまいましたが，電子銃の原理的な構造を説明します．右の図を見て下さい．電子銃では，金属でできた陰極と陽極をおのおのの面が互いに平行になるように配置されています．陰極を高温に加熱します．すると，陰極から電子が飛び出してきます．これは熱電子放出と呼ばれる現象です．陰極の材料としては，高温になっても溶けない金属が選ばれます．陽極と陰極の間に一定電圧 V をかけます．２つの電極の間の間隔を d とすると，陽極と陰極の間に位置する電子には，電気力 eV/d が作用することになるのです．ここで電子の電荷を $-e$ としています．電気力については，電気磁気学で説明がなされのので，それまでのお楽しみということで．



電子も小さくて軽いながら，質量を持った物体です．運動方程式に従って，運動の形態が決まります．電子の位置を陰極の端から計り，その値を x とします．電子の質量を m とすると，電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t)=\frac{eV}{d} \tag{4.12}$$

となります．

［設問 4.9］　次に示す形の $x(t)$ は(4.12)式を満たすことを確認しなさい．ここで，x_0 と v_0 は定数とします．

$$x(t)=x_0+v_0t+\frac{eV}{2md}t^2 \tag{4.13}$$

一つの電子が $t=0$ で陰極からフラフラと（初速度はほぼゼロで）飛び出したとしましょう．その電子に対しては，$x_0=0$, $v_0=0$ とおけます．すると，

$$x(t)=\frac{eV}{2md}t^2 \tag{4.14}$$

となります．

［設問 4.10］　陰極の表面で速度がゼロであった電子は，いつ陽極に到達するのでしょうか．到達に要する時間 T を答えなさい．また，陽極に到達したときの速度が次式で与えられることを示しなさい．この速度が電極間の間隔によらないことは，憶えておきましょう．

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}} \tag{4.15}$$

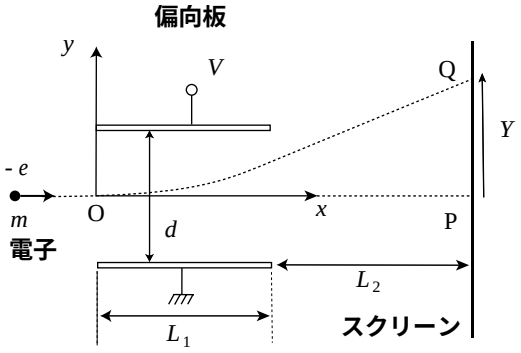
［設問 4.11］　(4.15)式に含まれる電圧を電子の加速電圧と呼びます．加速電圧が100[V],1000[V]の場合に，電子が陽極に到達したときの速度を計算してみなさい．

陽極に穴があいていると，一部の電子は穴を通り抜けていきます．この通り抜けていく電子が電子銃から打ち出された電子なのです．電気力は電極間でのみ電子に作用します．電極外では力が電子に作用しません．従って，一旦陽極を通り抜けた電子は，運動法則により(4.10)と(4.11)式に従って等速直線運動をすることになります．

オシロスコープ再考　　その２

電子銃から打ち出された電子は，集束レンズに入って運動の向きをそろえられます．集束レンズの構造と機能については省略します．

次に，電子は２つの偏向板に入っていきます．話を簡単にするために，偏向板は垂直偏向板だけであるとします．偏向板の基本的構造は至極簡単なもので，図に示すような単に２つの平板電極を平行に配置しただけのものです．以後，電子の電荷は $-e$，質量は m，電極間の距離は d，幅は L_1 として話を進めます．



２つの電極板の間に電圧 V がかかっているとします．電子は電極間に位置するときにだけ電気力 eV/d を感じます．この力は y 方向を向いていることに注意を払って下さい．x 方向には何の力も働かないのです．従って，電極内に位置する電子の運動方程式は，x 方向と y 方向の２つあり，それらは次式となります．

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t)=0 \tag{4.16a}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t)=\frac{eV}{d} \tag{4.16b}$$

［設問 4.12］　ある電子が図に示した電極板の左端に一定の速度 v_0 で飛び込んだとします．その時刻を $t=0$ とし，また電子が飛び込んだ位置を座標の原点とします．

(1)　以前の結果を利用して，$x(t)$と$y(t)$の関数形を決めなさい．
(2)　電子が電極板から飛び出す時刻T_1を求めなさい．
(3)　時刻T_1における電子の位置のy座標の値y_1を答えなさい．
(4)　電極板から飛び出す瞬間での電子の速度（x方向v_{x1}とy方向v_{y1}）を答えなさい．

偏向板を飛び出した電子は，もはや力を受けません．従って，偏向板を飛び出したあとの電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t)=0 \tag{4.17a}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t)=0 \tag{4.17b}$$

となります．関数形を決めるまでもなく，運動の第 1 法則を使うと，

$$x(t)=L_1+v_{1x}(t-T_1) \quad , \quad y(t)=y_1+v_{1y}(t-T_1) \tag{4.18}$$

となります．

［設問 4.14］　電極の右端からスクリーンまでの距離をL_2として，次の問に答えなさい．
(1)　電子が偏向板を飛び出してから，スクリーンに衝突するまでの時間を答えなさい．
(2)　スクリーン上の電子の位置Yを求めなさい．
(3)　比Y/Vを「静電偏向感度」といいます．この感度を向上させるためには何を大きく，何を小さくすればよいことになりますか

4.2　三角関数の微分

次に，微分の定義(4.4)を三角関数の一つである sin に適用してみましょう．$f(x)=\sin x$とおいて，$f(x+h)-f(x)=\sin(x+h)-\sin x$の計算を試みても，sin が多項式で与えられていないので，多項式のところで成功した計算方式が使えません．以前の三角関数の章ででてきた，三角関数の差を積に変換する公式(1.32)を使うと，

$$\sin(x+h)-\sin x=2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2} \tag{4.19}$$

と変形できるので，sin の微分は

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \tag{4.20}$$

となります．ここで$h/2=h'$として，h'を改めてhと置き換えると

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin h}{h} \tag{4.21}$$

となります．

この式(4.21)の右辺を調べてみましょう．因子の一つである$\cos(x+h)$は$h\to 0$とすると$\cos x$に近づくので，$\cos(x+h)$では最初から$h=0$としても，不都合はないようです．残りは$\sin h/h$となりますが，$h\to 0$とするとこの値がどのように変化するか調べてみましょう．

［設問 4.14］ $\sin h/h$の値を，$h=1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$として計算してみなさい．

次のような関係式が存在します．

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \tag{4.22}$$

上の設問からも，$h\to 0$で$\sin h/h$が 1 に近づくことがわかったでしょう．この (4.22)式を使うと，(4.21)式より

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{4.23}$$

となります．

(4.22)式はaをゼロでない定数とするとき，より一般的に，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin ah}{h} = a \tag{4.24}$$

と書かれます．$k=ah$とおけば，$h=k/a$となります．従って，

$$\frac{\sin ah}{h} = \frac{\sin k}{\frac{k}{a}} = a\frac{\sin k}{k}$$

となります．もちろん$h\to 0$のときは$k=ah\to 0$です．変数kを改めてhと書き直せば，(4.24)式が得られます．

［設問 4.15］ $\cos(x+h)-\cos x$を積の形に変換したのち，式(4.22)を用いて次式を証明しなさい．

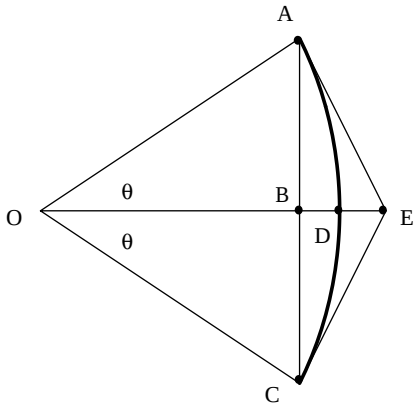
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{4.25}$$

［設問 4.16］ ωとθを定数とします．(4.24)式を利用して次式を証明しなさい．

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t+\theta) = \omega\cos(\omega t+\theta) \tag{4.26}$$

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\theta)=-\omega\sin(\omega t+\theta) \tag{4.27}$$

三角関数の微分を行う際に，基本的関係式となった式(4.22)を説明しておきます．この関係式は円弧の性質から導かれます．$\overset{\frown}{\mathrm{ADC}}$ は単位円（半径が１）の円弧であるとします．そして，$\angle\mathrm{AOC}=2\theta$ とします．また，A 点と B 点での円に対する接線は，E 点で交わるとします．このとき，ラディアンの定義より $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\theta$ となります．また，$\mathrm{AB}=\sin\theta$，$\mathrm{AE}=\tan\theta$ と表せます．円弧は三角形 ACE に包み込まれています．円弧は中心 O からみて常に凸なので，



$AC<\overset{\frown}{\mathrm{ADC}}<\mathrm{AEC}$ の関係が成立します．これは不等式

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

を与えます．すべての辺を $\sin\theta$ で割って，逆数をとると次の不等式を得ます．

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

この不等式で θ を限りなく 0 に近付けると（$\theta\to 0$），$\cos\theta\to 1$ なので

$$\frac{\sin\theta}{\theta}\to 1\quad(\theta\to 0)$$

となります．これは式(4.22)そのものです．

式(4.22)から円の面積の公式が導けます．円の半径を r としておきます．扇形 AOD の面積は三角形 AOB の面積（$\frac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta$）より大きく，三角形 AOE の面積（$\frac{1}{2}r^2\tan\theta$）より小さくなります．同じ扇形を $2\pi/\theta$ 個集めれば円となるので，円の面積を S とすると，

$$\frac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta\times\frac{2\pi}{\theta}<S<\frac{1}{2}r^2\tan\theta\times\frac{2\pi}{\theta}$$

が成立します．ここで円の分割を細かくする，すなわち $\theta\to 0$ とすると，$S=\pi r^2$ となります．

ＲＬ直列接続

三角関数の合成（1.6 節）のところで，積み残した課題について述べてみます．抵抗とコイルを直列に接続して，その両端に交流電圧をかけたときにコイルの両端に現れる電圧を求めるということでした．

Introduction　4 で既に述べたように，コイルに時間変化する電流が流れると，その

時間変化の速さに比例した電圧がそのコイルに発生します．微分を勉強した皆さんはコイルでの電圧と電流の関する関係式をかけるはずです．「その時間変化の速さに比例した」という部分に注目して下さい．言葉を補って，読み替えてみましょう．「物体の位置 x の時間変化の速さに比例した」とすると，「物体の位置の変化の速さ」は速度 $\dfrac{dx}{dt}$ のことであると思いついたでしょう．上の命題では「その」は電流を表しますから，位置を電流 i にかえれなければなりません．コイルでの電圧を v，比例係数を L とすると，上の命題は

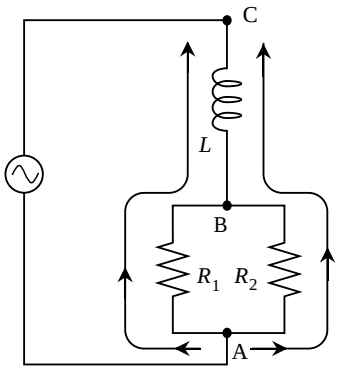
$$v = L\frac{di}{dt} \tag{4.28}$$

となります．比例係数を L のことを，インダクタンスと呼んでいます．

回路の動作（回路を構成する素子での電流と電圧）を調べるときには，自然界の法則を電気回路向けに言い換えた次の大原則に従わなければなりません．

原則１：１ つの節点において，その節点に流入する電流の和と流出する電流の和は等しい．

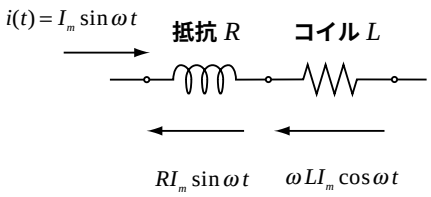
原則２：２ つの節点間の電圧は，その ２ 点間をたどる経路中の素子での電圧の和となり，経路によらない．



ここで「節点」とは，素子と素子との接続点を意味します．詳しいことは電気回路や電子回路で必ず紹介されます．原則１は電荷保存の法則の言い換えで，回路の第１法則と呼ばれています．

原則２についてとまどう向きもあるかもしれませんので，具体例で少し説明しておきます．右の回路図をみて下さい．黒い点を付けた場所は素子と素子を接続している節点です．いま，A と C の間の電圧を測る道筋を２つ考えます．ひとつは A から出発して抵抗 R_1 とコイル L を経由して C に至る道筋で，もう一つは R_2 と L を経由するものです．どちらを採用しても節点 AC 間の電圧は同じであると主張しているのが原則２なのです．この例では，もちろん抵抗 R_1 と R_2 での電圧は同じとなります．この原則２は第２法則と呼ばれています．

これだけの準備をしておくと，やっと“宿題”の解答が与えられます．第一法則によれば，抵抗とコイルに流れる電流は同じです．第２法則から，抵抗とコイルの直列接続全体にかかる電圧は抵抗とコイルでの電圧の和になります．流れる電流を $i(t) = I_m \sin\omega t$ とすれば，抵抗での電圧 v_R とコイルでの電圧 v_L はそれぞれ



$$v_R(t) = R\,i(t) = RI_m \sin\omega t \tag{4.29}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \omega L I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{4.30}$$

と与えられます．三角関数の微分については，(4.26)式を用いました．蛇足ながら，(4.26)式で$\theta = 0$の場合であることを書き添えます．

4.3　指数関数と対数関数の微分

指数関数の微分

e^xの微分からはじめましょう．微分の定義式(4.4)と指数法則を使うと次式を得ます．

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} \tag{4.31}$$

sin の微分を行ったときと同様に，右辺の振る舞いを調べてみましょう．$(e^h - 1)/h$のグラフを描いてみると，$h \to 0$のとき$(e^h - 1)/h \to 1$となることが確認できます．事実，

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{4.32}$$

の関係があるのです．

［設問 4.17］　$0 < h \le 2$の範囲で$(e^h - 1)/h$のグラフを描きなさい．

e^xの微分は，式(4.32)を使うと，次式で与えられることになります．

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{4.33}$$

これは，とても美しい関係であるといえます．e^xを微分してもe^xになって，関数の形が変わらない！もちろん何回微分しても関数の形が変わりません．

e^xの微分を求めるに必要となった(3.32)式は，自然定数eの定義を利用して導くことが可能です．興味がある方は次を参照して下さい．

ここでは，数学的な厳密性を問わないことにします．e の定義式(2.24)を再掲します．

$$e = (1 + \frac{1}{n})^n \quad (n \to \infty)$$

ここで，$h = 1/n$ とおくと

$$e = (1 + h)^{\frac{1}{h}} \quad (h \to 0)$$

となります．ここで$h > 0$ としておきます．h への置き換えによって極限操作が$h \to 0$と代わっているのに注意してください．この式の両辺を h 乗します（指数法則を思いだして下さい）．すると

$$e^h = 1 + h \quad (h \to 0)$$

となり，これを変形すれば(4.32)式となります．

［設問 4.18］　aを定数とするときに次式が成立することを，(4.32)式に基づいて証明しなさい．

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h}=a \tag{4.34}$$

［設問 4.19］　aとbを定数とするときに次式が成立することを，(4.34)式に基づいて証明しなさい．

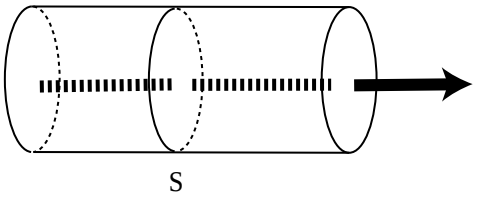
(1)　$$\frac{d}{dx}e^{ax}=a\,e^{ax} \tag{4.35}$$

(2)　$$\frac{d}{dx}e^{ax+b}=a\,e^{ax+b} \tag{4.36}$$

コンデンサの放電

今まで気軽に電流という言葉を使ってきました．ここで電流はどのように定義されるか考えてみましょう．電流という言葉から，すぐに想像されるように電流は電気（電荷）の流れなのです．この流れの大きさをどのように数量化すればよいのでしょうか？

次の図を見て下さい．これは水を流すパイプの一部をイメージしたものです．導線のある断面をＳとします．この断面を通過していった水の積算量を観測したとしましょう．そして，観測を始めた時刻を$t=0$として，通過していった水の積算量の関数形が$q(t)$と得られたとします．



Ｓの先にバケツをおいておけば，そのバケツに溜まった水の量がＳを通過していった積算量となります．この$q(t)$から水の流れの大きさをどのように取り出したらよいでしょうか．

水の流れの大きさは単位時間あたりにその断面を通過した水量で与えられます．時刻tと$t+\Delta t$の短い時間間隔Δtの間に流れる水の量は$q(t+\Delta t)-q(t)$です．これを時間間隔Δtで割った量

$$\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

が単位時間あたりに通過した水量，すなわち，水の流れです．このように，この量は$\Delta t\to 0$とすると，$q(t)$の微分に他なりません．流れの大きさは微分であらわせるのです．

電気の問題では，上の図を回路中での素子と素子をつなぐ導線（電線）の一部と考え，また，$q(t)$を通過電荷の総量と考えればよいのです．以上のことから，電流$i(t)$は通過電荷量$q(t)$の時間微分

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{4.37}$$

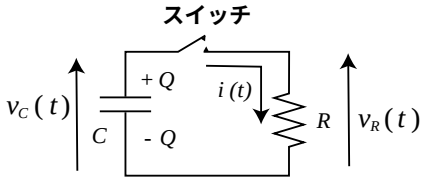
で与えられます．電荷の単位はクーロンとよばれ，[C]と書かれます．従って，電流は単位は[C / s]となり，これをアンペア[A]と呼んでいます．

電気回路の素子としては，以前に取り上げた抵抗とコイルの他に，コンデンサーと呼ばれるものが現れます．コンデンサーは絶縁体を二つの導体板ではさんだものという程度の紹介にとどめておきます．このコンデンサーに電圧をかけると，二つの導体板（電極と呼ぶ）には電圧に比例した正と負の電気（電荷と呼ぶことが多い）がたまります．コンデンサーにかかる電圧をv，帯電している電荷をqとすると，この関係は数式を使って表現すると，

$$q=C\,v \tag{4.38}$$

となります．ここで比例係数Cはキャパシタンスあるいは静電容量と呼ばれる量で，コンデンサーが電荷をためこむ能力を表す指標です．

コンデンサーに電荷をためる過程を充電と呼んでいます．充電されたコンデンサーから電源を取り外し，新しく抵抗を取り付けますと，導体板にたまった電荷が取り付けられた抵抗を通して，互いに反対側に移動して，たまった電荷の量が減っていきます．この蓄えられた電荷量が減少していく過程を「放電」とよんでいます．



放電過程での電流の流れ方を調べてみましょう．コンデンサーには最初から電荷Qがたまっているとします．スイッチを時刻$t=0$で閉じて，放電を開始させたとします．コンデンサーでの電荷はQから減少していきます．時刻tでコンデンサーに蓄えられている電荷量を$q(t)$とすれば，コンデンサーでの電圧$v_C(t)$は

$$q(t)=C\,v_C(t) \tag{4.39}$$

となります．流れる電流$i(t)$を図の向きにとれば，

$$i(t)=-\frac{dq(t)}{dt} \tag{4.40}$$

となります．負号がついているところに注意して下さい．

抵抗での電圧$v_R(t)$はオームの法則より，

$$v_R(t)=R\,i(t) \tag{4.41}$$

と書けます．

［設問 4.20］　(4.40)式で負号がつく理由を考えなさい．

［設問 4.21］　回路に関する第２法則は，$v_C(t)=v_R(t)$となります．この関係式を利用して，次式を導きなさい．

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{CR}q(t) \tag{4.42}$$

［設問 4.22］　上の設問で得られた微分方程式は，次式とすると満足されることを確認しなさい．

$$q(t) = Q\,e^{-\frac{t}{CR}} \tag{4.43}$$

［設問 4.23］　$C = 0.1[\mu\mathrm{F}]$, $R = 100[k\Omega]$, $Q = 1.0\times10^{-5}[\mathrm{C}]$として，放電過程で流れる電流のグラフを書きなさい．

対数関数の微分

対数関数$\log_e x$の微分は，微分の定義と対数関数の性質を使うと，次式で与えられます．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_e x &= \lim_{h\to0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\log_e(1+\frac{h}{x})}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log_e(1+\frac{h}{x}) = \lim_{h\to0}\log_e(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}\end{aligned} \tag{4.44}$$

ここで，$\lim_{h\to0}\log_e(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$で対数の真数$(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$に注目してみましょう．$x/h = n$とおいて指数法則を使うと

$$(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} = (1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{x}} = \left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}^{\frac{1}{x}} \tag{4.45}$$

となります．$h\to0$に対応して$n\to\infty$に変わることと，対数関数の性質を使うと，

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\log_e(1+\frac{1}{n})^n \tag{4.47}$$

と変形できます．

自然定数の定義式を思い出して下さい．(4.47)式の右辺の対数で真数の部分はまさに$n\to\infty$のとき，自然定数eとなります．従って，

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\log_e e \tag{4.48}$$

となります．対数の底を最初から自然定数eと選んでおくと，$\log_e e = 1$なので

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x} \tag{4.49}$$

とのシンプルな関係式となります．微分と“相性”のよい対数は自然対数といえます．

微分が理論の展開に必要不可欠であるような工学系の分野では，自然対数を$\log x$のよ

うに底を書かないで単に log で済ますこともありますが，近頃は ln という記号を使うことが推奨されています．多分，ln は log natural が由来でしょう．ついでに，自然定数 e を底にした指数関数 e^x も $\exp(x)$ と表記する場合もあることを注意しておきます．

4.4　複合した関数の微分

２つの関数の積の微分

これまで，多項式，三角関数，指数関数，対数関数を微分すると，どのような関数に変わるのかを見てきました．これだけで十分でしょうか．例えば，多項式と三角関数が混じり合った関数の微分はどうなるのでしょうか？具体例としては，$f(x)=x\sin x$ の導関数はどんな形になるでしょうか．

この関数の導関数を定義に基づいて考えてみましょう．まず，$\{f(x+h)-f(x)\}/h$ を具体的に書き下して，適当に変形してみます．変形の要点は分子で，$(x+h)\sin x$ を引いて加えているところです．

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}\\ &= \frac{(x+h)\{\sin(x+h)-\sin x\}+\{(x+h)-x\}\sin x}{h}\\ &= (x+h)\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}+\frac{(x+h)-x}{h}\sin x\end{aligned}$$

導関数を求めるために，$h\to 0$ として極限をとる操作をしなければなりませんが，“きわどい”部分はもちろん h での割り算を含むところです．右辺の第１項での因子 $x+h$ は $h\to 0$ としても x に近づくだけで，問題はなさそうです．２番目の因子 $\{\sin(x+h)-\sin x\}/h$ は $h\to 0$ とすれば，導関数の定義より $\sin x$ の微分そのものです．第２項も同様に考えれば，

$$\frac{d}{dx}x\sin x = x\cos x+\sin x$$

となります．

上で説明した計算手順を一般化してみましょう．２つの関数を $f(x)$, $g(x)$ として，この関数の積を定義に従って微分してみます．変形の要点は以前と同様に分子で $f(x+h)g(x)$ を引いて加えているところです．少し長いですが変形の手順を示しておきます．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\}+g(x)\{f(x+h)-f(x)\}\Big]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\big\{g(x+h)-g(x)\big\}}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\big\{f(x+h)-f(x)\big\}}{h}\\ &= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\end{aligned}$$

右辺で項や因子の順序を入れ替えて，まとめると

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)g(x)\right\}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx} \tag{4.50}$$

となります．３つ以上の関数の積を微分するときは，上の公式(4.50)を繰り返し使えばよいことになります．

次に２つの関数の商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分公式を求めてみましょう．$\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\dfrac{1}{g(x)}$ とみなせるので，まず $\dfrac{1}{g(x)}$ の微分を求め，その後に既に知っている積の微分公式(4.50)を使うとの方針で進みます．微分の定義に従えば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\}=-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h\,g(x+h)g(x)}\\&=-\frac{1}{g(x)^2}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

となります．分母に現れる積 $g(x+h)g(x)$ は $h\to 0$ の極限で $g(x)^2$ となるので，次式を得ます．

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}=-\frac{1}{g(x)^2}\frac{d}{dx}g(x) \tag{4.51}$$

次に積の微分公式(4.50)で $g(x)$ の代わりに $\dfrac{1}{g(x)}$ を採用すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{f(x)\frac{1}{g(x)}\right\}&=\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}\\&=\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)^2}\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

となり，これを整理すると，次の商の微分公式を得ます．

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2} \tag{4.52}$$

微分公式(4.51)は商の微分公式で $f(x)=1$ とした特別な場合となっていることに気づいて下さい．

［設問 4.24］　積や商の微分公式を用いて，次にあげる関数の微分を求めよ．ただし，$\log x$ や $\exp(x)$ とあるのは，それぞれ e を底とした対数関数と指数関数です．表記法に慣れて下さい．

（1）$x\log x$　（2）$x^2\exp(x)$　（3）$\exp(x)\sin x$　（4）$\exp(-x)$

（5）$x^2\exp(-x)\sin x$　（6）$\dfrac{1}{x}$　（7）$\dfrac{\sin x}{x}$

合成関数の微分

合成関数とは $y=\sin(x^2+1)$ のような形のものを呼びます．これは x を独立変数とすると，x^2+1 は x の 2 次関数となり，その 2 次関数を引数とする sin 関数で y がきまるという具合に，関数の複合構造になっているからです．一般的には $y=f(g(x))$ と表現します．この形はよく現れますので，実際的にも重要です．合成関数の微分は次のように求めることができます．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

2 行目に移るところで分母と分子に $g(x+h)-g(x)$ を挿入しています．同じものを分子と分母にかけることは 1 をかけたことに他ならないので，式の値は変わりません．ここで $\Delta g=g(x+h)-g(x)$ とおきますと，当然 $g(x+h)=g(x)+\Delta g$ です．上式の第 1 因子は

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}=\frac{f(g(x)+\Delta g)-f(g(x))}{\Delta g}$$

と書き直せることと，$h\to 0$ の極限で Δg もゼロに近づくことを合わせると，この表式は f を g で微分する形になっています．従って

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{dg}\{f(g)\}\frac{d}{dx}\{g(x)\} \tag{4.53a}$$

となります．この微分公式は

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \tag{4.53b}$$

と簡単に書くと憶えやすいでしょう．

4.1 節でライプニッツが用いた記号はうまく工夫されていると述べました．それが，この合成関数の微分の所でも言えます．微小変化量（微分）を用いて $y=f(g(x))$ の微係数を求めるには，要するに $\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}$ を求めればよいのです．ただし，対象にしている関数は複合しているので x が dx だけ微小変化すると $g(x)$ が dg だけ微小変化し，dg を通して f は df の微小変化をすることになります．この dg を使って，形式的に

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dx}\frac{dg}{dg}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

とすると，(4.53b)が得られてしまいます．

三角関数の微分の所ででてきた(4.26)式や(4.27)式は，合成関数の微分公式から導出できます．(4.26)式を例にとって説明してみます．(4.26)式は

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t+\theta)=\omega\cos(\omega t+\theta)$$

でした．独立変数が t になっていることに注意して，関数 g として $\omega t+\theta$ を，関数 f として sin を選びます．すなわち，$f(g)=\sin g$, $g(t)=\omega t+\theta$ とするのです．すると，

$\sin(\omega t+\theta)=f(g(t))$ となります．ここで(4.53b)を使えば，

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t+\theta)=\frac{df}{dt}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}=(\cos g)\,\omega=\omega\cos(\omega t+\theta)$$

となり，上記の結果を得ます．

［設問 4.24］　次にあげる関数の微分を求めよ．ただし，$\ln x$ や $\exp(x)$ とあるのは，それぞれ e を底とした対数関数と指数関数です．表記法に慣れて下さい．

（1）$\ln(1+x)$　（2）$\exp(3x-x^2)$　（3）$\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　（4）$\sin(x^2+1)$

（5）$\sin(\sin x)$　（6）$\sqrt{1+x^2}$

逆関数の微分（この項は読み飛ばしてもらってかまいません．）

指数関数と対数関数は互いに逆関数の関係になっていたことを思い出して下さい．すなわち，$y=e^x \leftrightarrow x=\log y$ でした．指数関数 $y=e^x$ を x で微分すると

$$y=e^x \to \frac{dy}{dx}=e^x$$

となります．

対数関数の方は y を独立変数と見直しておいて，$x=\log y$ を y で微分すると，

$$x=\log y \to \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$$

となります．上で得られた２つを辺々かけてみますと，

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=e^x\frac{1}{y}$$

を得ます．右辺の y は $y=e^x$ であることを思い出すと，

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1 \tag{4.54}$$

となります．この式の左辺を dx や dy の微分どおしの演算と思うと，左辺の値は１となります．ライプニッツの記号がうまくできている例でもあります．この式は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \tag{4.55}$$

を与えます．

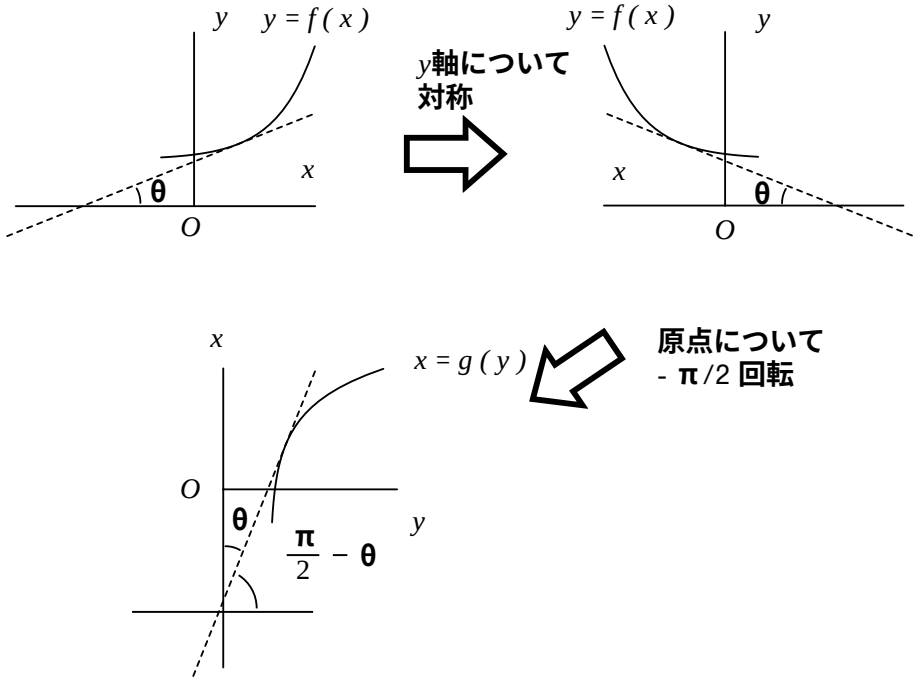
上の関係式(4.50)と(4.51)は指数関数と対数関数に限りらず，一般に成立する関係式なのです．それは次の設問に答えるとわかります．

［設問 4.25］　$y=f(x)$ の関数が逆関数を持つとします．すなわち，$y=f(x)$ を x について逆に解き直すと，$x=g(y)$ であるとします．

(1)　ある x についての $y=f(x)$ の導関数の値が $\dfrac{dy}{dx}=a$ であるとすると，図で $a=\tan\theta$ であることを理解しなさい.

(2)　見方を変えて（独立変数を y とする），$x=g(y)$ で x における微係数は $\dfrac{dx}{dy}=\tan(\pi/2-\theta)$ で与えられることを理解しなさい.

(3)　上の 2 つの関係式から θ を消去して，(4.54)式を導きなさい.



演習問題

4.1 次の関数を微分せよ．

(1)　x^5　　(2)　$\sqrt{x}$　　(3)　$x^{\frac{3}{5}}$

4.2 次の関数を微分せよ．

(1)　$\dfrac{x}{(2x-1)^2}$　　(2)　$\sqrt{x}(x+2)^2$　　(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4.3 次の関数を微分せよ．

(1)　$x^2 \ln x$　　(2)　$x\exp(2x)$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\ln x}$

4.4 次の関数を微分せよ．

(1)　$\sin^2 x$　　(2)　$\cos(2x^3)$　　(3)　$\tan x$

4.5 次の関数を微分せよ．ただし，(3)は難しいのでとばしてもよろしい．

(1)　$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　(2)　$\ln(\tan\dfrac{x}{2})$　　(3)　x^x

4.6 3 次関数 $y=x^3+4x^2-3x+2$ 上のある点 P における接線が，x 軸と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなして交わった．このとき，P の座標を求めよ．

4.7 $y=x^2\exp(-4x)$ の極値を求めよ．