解析学入門

川畑　茂徳
福岡工業大学　電子工学科

平成 14 年 3 月 18 日

はしがき

大学における基礎教育は「日本語の読解力と文章力」,「英語によるコミュニケーション」と「数学の基礎学力」にあると言われています．しかしながら高校教育内容の自由化と大学入試形態の多様化が進んだ結果，大学新入生がもっている数学の基礎学力には著しい差が生じてきました.「数学 I」と「数学 A」のみ学び，微分や積分をまったく学習していない学生が工学部に進学する状況が生じました．これに伴い，本学における数学教育も大幅な見直しが迫られるようになってきています.

理工系大学の基礎数学では，短期間にかなり広い範囲の数学を履修しなければならないし，さらにそれがすぐ後の専門課程で役立つようによく消化されなければなりません．そのために必要な時間が不足して困るという意見にしばしば接してきました．入学して最初のカルチャーショックが数学だった，という人は多かったのです．そこで，教員はどうしても学生諸君の自己研鑽に希望を託さなければなりません．しかし，今や学生の自己研鑽に期待できないようです．それどころか，今では，多くの大学が高校数学の復習のためのクラスを作らざるをえない状況が生じています．電子工学科も 1 年前期の科目として「数学補習」を開講しています．主に「数学 II 」の内容です．また，1 年前期の科目「電子工学基礎」において，”何のために数学を学ぶのか ”，”この数学は電子工学の何に関係するのか ”といった皆さんの疑問に答え，大学での専門教育に必要な数理的素養を身につける訓練をおこなっています.

「解析 I」では微分積分学の基本的な知識の学習と，その応用を目標にします．主に「数学 III」の復習，その延長と発展を目標に，無理なく理解できる内容となっています． Leibniz と Newton はそれぞれ独立に，現代物理学の基礎づけとなる微分積分学を発見しました．重要なことは，力学から生じる諸問題が微分積分学の発展に決定的な影響を与えたことです． すなわち，Newton は Kepler の惑星運動についての法則を説明しようとして，微分積分学を発展させました．しかし，惑星および弾道体の運動についての諸問題だけが微分積分学の適用範囲ではありません．微分積分学の適用範囲は広大なものです．微分と積分という 2 つの基本的概念とその間の関係を中心とする「解析 I」は解析学という数学の大道の出発点である，と同時に自然科学全体の大道の出発点でもあります．自然現象や社会の仕組みを解明しようと試みるものは， この大道を通らざるをえないのです.

今から 20 年か 30 年先にどんな数学が工学に応用され，技術者の素養として必要になるかを見抜くのは難しいでしょう．しかし，どんなことになろうとも，数学の基礎訓練をしっかりうけた学生は，自分でもっと勉強をすれば時代の要求する新しい数学に習熟しうるようになるといえます．すなわち，大学数学において最も重要な目標は，学生が数学的思考になれて，将来の必要なことに備えられる能力を身につけることです.

目次

第1章　準備

1.1　集合

集合は，A, B などの大文字を使って表す. 集合の根本概念は，属する (belong) という概念である. a が A に属する，または，a が集合 A の要素 (element)[1]であることを $a \in A$，b が集合 A の要素でないことを $a \notin A$ のように表す. ギリシャ文字イプシロンのこの文字はあまりよく所属を表すのに使われるので他のどんなことを示すために使うことをほとんど禁じられる.

集合の内容を表すには，次のような 2 つの方法がある.

(1) 要素を書き並べて表す.　　(2) 要素の性質を述べて表す.

例 1.1 (a)A を 6 より小さい自然数の集合とすると，(1) では，$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (2) では，$A = \{x | \ x < 6, x \in \mathbf{N}\}$ と表される.

(b) 自然数全体の集合については，(1) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$　(2) $\mathbf{N} = \{x | \ x$ は自然数 $\}$ と表される.

1.1.1　部分集合

所属の最も基本的な性質は**等しい** (equal) という関係である．集合 A, B について，A の要素が全体として B の要素と一致するとき，集合 A と B は等しいといい，$A = B$ で表す.

A と B が集合でかつ A のすべての要素が B の要素であるならば，A は B の**部分集合** (subset) であるととか B が A を**包含** (include) するとかいい,

$$A \subset B$$

または

$$B \supset A$$

で表す.

例 1.2 $\mathbf{N} = \{x | \ x$ は自然数 $\}, \mathbf{Z} = \{x | \ x$ は整数 $\}$ とすると，$\mathbf{N}$ は $\mathbf{Z}$ の部分集合で，$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$

集合 A の要素は，つねに集合 A に属するから，A がどんな集合でも，A 自身は A の部分集合である．つまり，$A \subset A$

集合 A, B について，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるような集合だとすれば A と B は同じ要素をもち $A = B$ である.

[1]または，元 (member) という.

1.1.2　和集合と共通集合

2 つの集合 A, B があるとき，A と B の要素をすべてあわせた集合を，A と B の**和集合** (union) といい，$A \cup B$ で表す．つまり，

$$A \cup B = \{x |\ x \in A \text{ または } x \in B\}$$

また，A と B の両方に属している要素の集合を，A と B の**共通集合** (intersection) といい，$A \cap B$ で表す．つまり，

$$A \cap B = \{x |\ x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

集合 A, B に共通の要素がない場合は，$A \cap B$ は要素を全くもたない．要素を全くもたない集合を**空集合** (empty set) といい，記号 ϕ で表す．A, B に共通の要素がないことは，$A \cap B = \phi$ と表される．

空集合はどのような集合 A の部分集合にもなっていると考えるので，$\phi \subset A$.

例 1.3 $A = \{x |\ x$ は 10 以下の素数$\}, B = \{x |\ x$ は 12 の約数$\}$ とすると，$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$

1.1.3　補集合

集合を取り扱うときは、あらかじめ考えているものの全体の集合が決まっていて，その部分集合を考える場合が多い．このとき，考えているもの全体の集合を**全体集合** (universal set) という．

全体集合 U のなかで，集合 A に属さない要素の集合を，A の**補集合**といい，$\overline{A}$ で表す．つまり，

$$\overline{A} = \{x; x \notin A, x \in U\}$$

2 つの集合 A, B について，次の法則が成り立つ．

定理 1.1.1 (de Morgan)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.2　条件と集合

x についての条件 $p(x)$ を考える代わりに， $p(x)$ を満たす x の集合を考えると便利な場合がある．条件 $p(x), q(x)$ を満たす x の集合をそれぞれ P, Q とおくとき，$P = \{x |\ p(x)\}, Q = \{x |\ q(x)\}$ であり，

1. $p(x)$ かつ $q(x)$ という条件を満たす x の集合は $P \cap Q$ である．
2. $p(x)$ または $q(x)$ という条件を満たす x の集合は $P \cup Q$ である．
3. $p(x)$ でないという条件を満たす x の集合は $\overline{P}$ である．

例 1.4 (1) 条件 $x^2 = x$ を満たす x の集合は $\{x |\ x^2 = x\}$ または $\{0, 1\}$
(2) 条件 $x > 1$ または $x > 3$ を満たす x の集合は $P = \{x |\ x > 1\}, Q = \{x |\ x > 3\}$ とおくとき，$P \cup Q = P$ である．

「p でない」という条件を条件 p の**否定** (negation) といい，$\overline{p}$ で表す．集合の de Morgan の法則と同様に，次の定理が成り立つ．

定理 1.2.1 (命題に関する de Morgan の法則)

$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$

ここで，記号 $\Longrightarrow$ は ”ならば” と読んでおくとよい．$p \Longrightarrow q$ は，英語では ”If p, then q” または ”p implies q” である．$p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに成り立つとき，$p \iff q$ としるし p と q は**同値** (equivalent) であるという．

補足 (1) 集合の根本概念は，属する (belong) という概念であって，それは次のように定式化される．

外延性公理 (axiom of extension) 2 つ集合はそれらが同じ要素をもつとき，かつそのときにかぎって相等しい.

素朴な意味における集合とは，ある条件 $C(x)$ をみたす x の全体 $\{x|\ C(x)\}$ のことである. そして，任意の条件 $C(x)$ に対して集合 $\{x|\ C(x)\}$ が存在するというのが，素朴な集合論におけるただ一つの生成原理であり，内包性原理 (axiom of comprehension) と呼ばれる.

(2) 属する ($\in$) と包含 ($\subset$) は概念としてまったく別物である．というのは包含はつねに反射的 (reflexive) であるが一方属するがいつも反射的だということはいっこうに明らかではないのである．すなわち $A \subset A$ はつねに真であるが $A \in A$ はいったい真なのであろうか？また，

任意の集合 A, B および C に対して，$A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば，$A \subset C$

このことを，記号 $\subset$ で表される関係は**推移的** (transitive) であるという．一方属する ($\in$) はそうでない.

(3) 2 つの集合が等しいか等しくないかという問題に答えるには別に困難なことはないだろうと思われる．ところがこれはそうではない．4 より大きい偶数全部の集合を A とし，2 つの奇の素数の和となっている数全部の集合を B としよう．われわれには，関係 $A = B$ または $A \neq B$ のどちらが真であるかが，いままでに知られていない．[2]

(4) 数学 I では $A \subset B$ の代わりに $A \subsetneqq B$ と書く.

[2] 1742 年に，ゴールドバッハが $A = B$ であるという予想を発表した.

第2章　関数と極限

2.1　準備

2.1.1　数直線

数直線上に異なる 2 点 O と E をとり (普通 E は O の右側にとる)，O に目盛り 0，E に目盛り 1 をあたえると，これを基準点として数直線が得られる．すなわちものさしの目盛りを刻むのと同じ要領で，OE と等間隔に並ぶ点を，E の右から順に，右のほうに $2, 3, 4\cdots$ と目盛りをつける．O の左の方向に OE と等間隔に並ぶ点には，0 から近い順に $-1, -2, -3, \cdots$ と目盛りをつける．次に OE を n 等分して，0 に一番近い分点に $\frac{1}{n}$ と目盛りをつける．今度はこれを基準として，$\frac{m}{n}$ $(m = 0, 1, 2\cdots; -1, -2, -3, \cdots)$ の目盛りをつける点が決まってくる．

このようにして，どんな有理数 $\frac{m}{n}$ をとっても，$\frac{m}{n}$ の目盛りをもつ点 (有理点) が直線上のどこにあるかが確定する．

われわれは有理数の集合 Q が**稠密** (dense) であることを知っている．すなわち，a と b が有理点ならば，$(a + b)/2$ はまた有理点である．これを繰り返していくと点 a と b の間に隙間のないくらい，ぎっしりと有理点が存在していることがわかる． a と b は，どこの有理点をとってもよいのだから，結局，数直線からどんなに短い線分を取り出してみても，その線分の中に有理点が無限に含まれている．この事実を，有理点は数直線上に稠密に存在するという．しかし，有理数だけでは不足であることは知っている．なぜ有理数だけにとどめられないのか？　それは，有理数の中には，たとえば $\sqrt{2}$ のような数が存在しないからである．そのような数を必要とするのはなぜか？そのすくなくとも 1 つの理由は，1 辺の長さが 1 の正方形の対角線がちょうど長さ $\sqrt{2}$ になり，したがって，このような数の存在を認めなければ，幾何学でごく普通に使われる線分の長さが何らかの数で表されないことを容認することになってしまう．数 $\sqrt{2}$ に続いて，当然，不可避的に入ってくるのは，有理数のすべての正負の平方根，それから立方根，一般に次の形のすべての数である．

$$r^{\frac{1}{n}}$$

ここで r は任意の正の有理数，n は 2 以上の任意の整数である．上の形のすべての数に対してもそれを目盛りにもつ点が数直線上に確定する．しかしこれで終わりでないことは，よく知られている． $\sqrt{2}$ が 2 次方程式 $x^2 = 2$ の解であることに注意すれば，具体的に，あれこれの代数方程式の解を新しい数として導入するように迫られるのである．こうしたことは，与えられた代数方程式が，すでに導入された数の中に解を持たないときにはつねに起こる．したがって，この方向を終わりまで進めよう．すなわち，$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ が任意の 整数 を係数にもつ多項式とするとき，方程式 $P(x) = 0$ のすべての実数解を**代数的数** (algebraic number) と呼ぶことにし，実数の世界に代数的数を導入する．代数的数の集合 A は次の特徴をもつ．

1. 有理数 r を既約分数 $\dfrac{p}{q}$ の形で表現すれば，すべての有理数 r は方程式 $qx - p = 0$ の解になるから代数的数の集合に属する．有理数の全体 Q は代数的数の全体 A の部分集合である．また数 $r^{\frac{1}{n}}$ は方程式 $qx^n - p = 0$ の解として定義されるから代数的数である．

2. 代数的数の集合は，四則演算 $(+, -, \times, /)$ などの普通の代数的演算に関して閉じている．すなわち，これらの演算の結果がつねにまたすべて代数的数になる．これから重要なことが導かれる．代数的数に対する代数的演算がつねに代数的数になるので，もはや，何らかの新しい数を導入する必要がないことである．

すべての代数的数に対しても，数直線上の点 (代数的点) を対応させて，代数的数の目盛りを数直線上につけることができる．

数直線上にある点全体から見れば，実は，代数的点はまばらにしか存在しない．そのため，代数的数の全体を実数として解析学を展開することができないのである．勿論，多くの代数的理論にとっては，代数的数で十分であっても，解析学にとってはこうした制限を設けることはできない．問題は，解析学が代数学の基本的演算のほかに，基本的でしかもきわめて重要な演算，極限操作をつけ加えることである．

半径 1 の円を描いて，それに正多角形を内接させ，その辺を限りなく多くしても，すべてのこのような多角形の円の長さは代数的数 a_n で表される．一方，この数列 $\{a_n\}$ の極限が円周の長さ 2π である．円周率 π は代数方程式の解になりえないので代数的数でない (C.L.F. Lindemann 1882 年). したがって数列 $\{a_n\}$ の極限は代数的数の集合には存在しない．解析学の目的のためには，代数的数だけでは不十分で，それに新しい実数をつけ加えることが必要である．π のような代数的でない数は**超越数** (transcendental number) とよばれる．解析学で現れる超越数の他の重要な例は有名な数 $e = 2.7182\cdots$ で，有理数列の極限によって生み出される．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

最後の問題は次のように述べられる．

> すべての実数の連続体は，すべての代数的数の集合に，代数的数から極限操作によって π や e のように得られる数，しかもそれ自身は代数的数でない超越数をつけ加えるだけよいのか?

この段階では，すべての実数の集合である連続体は，後でそれにますます新しい数をつけ加える可能性が残されている．いいかえると，すべての超越数に対し数直線上の点 (超越点) を対応させて，超越点の目盛りを数直線につけたとき数直線上にはまだ隙間が残っているかもしれないのである．しかし，結論だけのべよう．

「すべての実数の連続体は，すべての代数的数の集合に，代数的数から極限操作によって π や e のように得られる数，しかもそれ自身は代数的数でない超越数をつけ加えるだけよい」

または次のように述べることができる．

「有理点にさらに無理点をつけ加えることによって数直線が完成し，有理数と無理数からなる実数ができる」

2.1.2　関数とグラフ

この節では，関数の基本的なことがらを見てみる．

例 2.1　$y =$ 華氏 (Fahrenheit) の温度に対する $x =$ 摂氏 (Centrigrade) の温度は $y = 9/5x + 32$ と表される．

このように，x の 1 つ 1 つの値に応じて y の値がきまるとき，y は x の**関数** (function) であるという．上の例では x のとる範囲が $-273 \leq x$ であり，x が 0 から 30 まで変わる間に，y の値は 0 から 86 まで変わる．

このように，x の関数において，x のとる値の範囲を関数の**定義域** (domain) という．関数の定義域は，式の後に括弧をつけて示すことにする．上の関数では，次のようになる．

$$y = 9/5x + 32 \quad (-273 \leq x)$$

また，x の値に対応して y のとる値の範囲を，関数の**値域** (range) という．この関数の値域は，$-2297/5 \leq y$ である．

関数を表す式において，定義域が示されていないときには，その定義域は，式が意味を持つ範囲でなるべく広くとるのが普通である．

つぎは別の関数の例である．

例 2.2　(1) 2001 年 1 月から 2001 年 12 月までのニューヨーク証券取引所での株の売上高
(2) 2001 年 1 月から 2001 年 12 月までのあるダムの貯水量

これらの例は，時刻 t に対してそれぞれ定まった数 $f(t)$ を対応させているので関数であるが，$f(t)$ を解析的あるいは代数的にに求められない例となっている．関数の値を決める方法にはいろいろと違ったものがある．関数のきまる仕組みについて深入りしすぎるとかえって混乱を生じる．数学ではこれらを抽象化して，x の 1 つ 1 つの値に応じて y の値がきまるとき，y は x の**関数** (function) であるという．

関数 $y = f(x)$ は変数を省略して単に関数 f などとかく．

例 2.3　$y = x$ の定義域は数全体 $\mathbf{R}$
$y = 1/x$ の定義域は，0 でない数全体 $\mathbf{R} - \{0\}$
$a > 0, a \neq 1$ のとき，関数 $f(x) = \log_a x$ の定義域は $x > 0$，値域は実数全体 $\mathbf{R}$

関数 $y = f(x)$ の定義域が集合 A，値域が集合 B であるとき，

$$f : A \longrightarrow B$$

という記号が「f は A から B への関数である」の縮約形として使われることもある．関数 $f(x)$ で x は「A の中を自由に動きまわっている元」だと考える．このように考えたとき，x を**独立変数** (independent variable) とよぶ．x が動きまわれば，それにつれて $y = f(x)$ も動く．y は独立変数 x に従属して動くので，**従属変数** (dependent variable) とよばれる．関数 $f : A \longrightarrow B$ を表すのには，その**グラフ** (graph) すなわち $\{(x, f(x)) | \, x \in A\} \subset \mathbf{R}^2$ の図形を描くと都合がよい．

2.1.3　三角関数

角の単位

角の大きさを表す方法は主に通りある．全角を 360 等分したものを 1°(1 度，degree) と定める方法を度数法という．度数法に対して弧度法と呼ばれるものがある．解析学では，次の方法で定義するラジアン (弧度) という単位で角を定義する．これは中心角の大きさとその中心角に対応する弧の長さが比例することにから，中心角の大きさを対応する弧の長さで表す方法である．

定義 2.1 半径 1 の円周上において，弧の長さが θ のときの中心角を θ **ラジアン** (radian) という．

解析学で三角関数 ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, これらの逆数をとって得られる関数 $\mathrm{cosec}x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$) が現れるときには，変数 x は弧度で測った角を示していると考える．解析学では原則として度数法を使わない． 三角関数の変数 x を度数で測ったものと考えると間違った結論に導かれることがある．

弧度法において，単位はラジアンである．すなわち，1 ラジアン $= \dfrac{180°}{\pi} = 57°17'44.806''$．しかしながら今後はいちいち単位名をつけない．読者に誤解を与える可能性がある場合のみ単位名 (ラジアン，rad) をつける．

例 2.4 (1) 中心角が直角となるときの弧の長さは $\dfrac{1}{4} \times 2\pi = \dfrac{\pi}{2}$ であるから 90° は $\dfrac{\pi}{2}$(ラジアン) である．
(2) 半径 r，中心角が 2π のときの面積が πr^2 であるから，半径 r，中心角 θ の扇形の面積 S は，比例計算で $S = \pi r^2 \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2 \theta$ で表される．

一般角

ここでは角に向きをつけることを考える．

xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円をとる．点 A(1, 0) を出発点とし，点 P がこの単位円の円周上を動くとしよう．線分 OP をこの意味で動径という．P が A を出発して**反時計回り** (counter-clockwise) に動いたときにできる $\angle$POA を + の角とし，**時計回り** (clockwise) に動いたとき，$\angle$POA を − の角と決める．点 P は何回円周をぐるぐる回ってもかまわない．回転しただけ角の大きさが増えることになる．

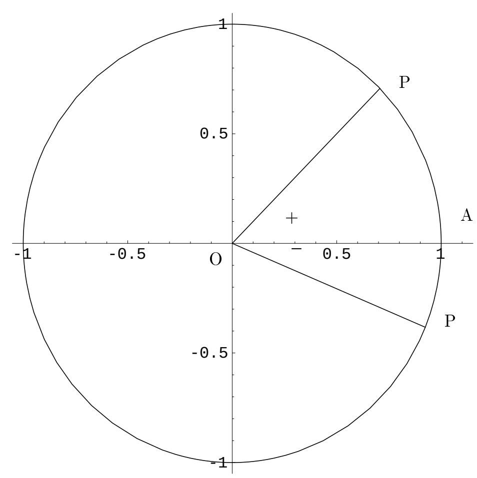

図 2.1: 動径 OP の一般角

点 P が一周回ると + 方向なら 2π，− 方向なら -2π 増えることになる．したがって，$\angle\mathrm{POA} = \theta$ のとき，次の角

$$\cdots, \theta - 2\pi \times 2, \quad \theta - 2\pi \times 1, \quad \theta, \quad \theta + 2\pi \times 1, \quad \theta + 2\pi \times 2, \cdots$$

の点 P の位置はすべて同じになる．これらを一般的に

$$\theta + 2n\pi \quad (-\pi < \theta \leq \pi, \quad n : 整数) \tag{2.1}$$

とかく．

注意 2.1 一般角 $\theta + 2n\pi$ において角度 θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ を満たすようにとる．この条件を満たすものを**主値** (principal value) という．

三角関数の定義

三角関数を定義する前に，直角三角形における三角比を復習しておく．

$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とするとき

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{a}{b} \tag{2.2}$$

であった．そして次のような特別な角

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}$$

の三角比は，特別な直角三角形を考えることによってその値を求めることができる．

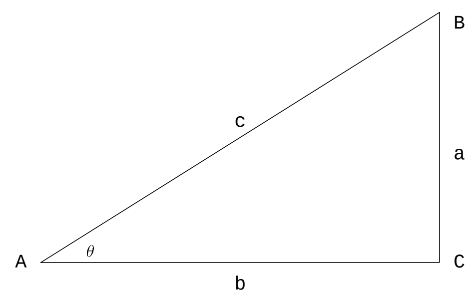

図 2.2: 三角比

次に三角関数の定義に入ろう．xy 平面上に，原点 O を中心とし，半径 r $(r > 0)$ の円を考える．この円周上に点 P をとり，その座標を (x, y) としよう．

定義 2.2 線分 OP の x 軸の正方向からの角を θ とするとき，次の 6 つの θ の関数を**三角関数** (trigonometric function) という．6 個の比

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}, \quad \sec\theta = \frac{r}{x}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} \tag{2.4}$$

をそれぞれ角 θ の**正弦** (sine)，**余弦** (cosine)，**正接** (tangent)，**余割** (cosecant，**正割** (secant)，**余接** (cotangent) とよぶ.

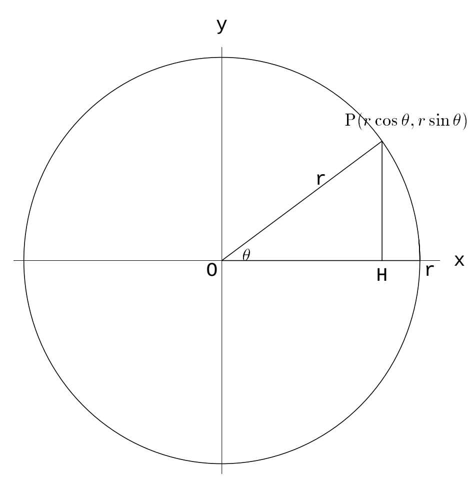

図 2.3: 三角関数の定義

$\tan\theta$ は直線 OP の傾きを意味し，点 P が y 軸上にあるとき，すなわち $\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) に対しては定義されない．

これらの三角関数の定義から，その値域はそれぞれ次のようになる．

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1, \quad -1 \leq \sin\theta \leq 1, \quad -\infty < \tan\theta < \infty$$

例 2.5 $\theta = \frac{2}{3}\pi, \theta = -\frac{\pi}{3}$ に対し，$\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ．また

図 2.4 より，点 P の座標は $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ であるから，$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，さらに点 Q の座標は $(1, -\sqrt{3})$ であるから $\tan\theta = -\sqrt{3}$.

$\theta = -\frac{\pi}{3}$ のとき，$\triangle$AOQ で考えると，$\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \tan(-\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$.

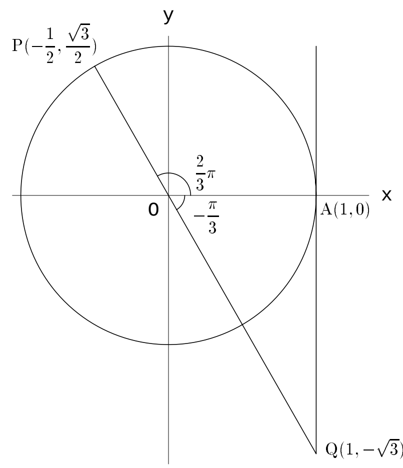

図 2.4: θ が鈍角の場合の三角関数

三角関数の性質とグラフ

三角関数にはたくさんの公式がある．それらの中から基本的のものをあげる．

定理 2.1.1 (周期性)

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x \tag{2.5}$$

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x \tag{2.6}$$

$$\tan(x + n\pi) = \tan x \tag{2.7}$$

これは三角関数の定義から明らかである．一般に関数 $f(x)$ がある $p \in \mathbf{R}$ に対してつねに関係式 $f(x) = f(x + p)$ を満たすとき，p を $f(x)$ の**周期** (period) といい，0 以外の周期を持つ $f(x)$ を**周期関数** (periodic function) という．最小の正の p を**基本周期** (fundamental period) という．定理 2.1.1 は $\cos x$ と $\sin x$ が基本周期 2π の周期関数で，$\tan x$ は基本周期 π の周期関数であることを示す．

定理 2.1.2 (対称性)

$$\cos(-x) = \cos x \tag{2.8}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \tag{2.9}$$

$$\tan(-x) = -\tan x \tag{2.10}$$

図 2.5 のように，角 θ を表す動径 OP と角 $-\theta$ を表す動径 OP' を考えると，2 点 P,P' が x 軸に関して対称な位置にあることから，定理 2.1.2 を得る．

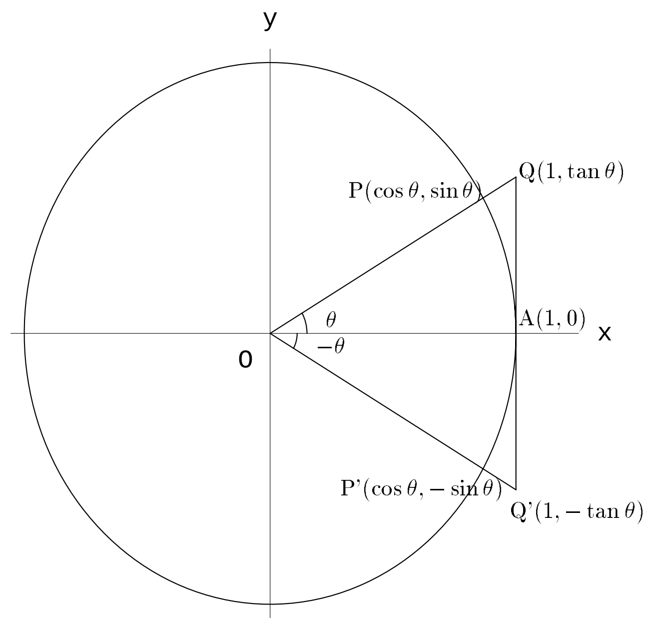

図 2.5: 角 θ と角 $-\theta$ に対する三角関数

一般に，関数 $f(x)$ が**偶関数** (even function) であるとは

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

がすべての x について成り立つことをいい，関数 $f(x)$ が**奇関数** (odd function) であるとは

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

がすべての x について成り立つことをいう．定理 2.1.2 は $\cos x$ が偶関数で $\tan x$ や $\sin x$ が奇関数であることを示している．この事実は関数 $y = \cos x, \sin x, \tan x$ のグラフを描くとさらに明確になる．

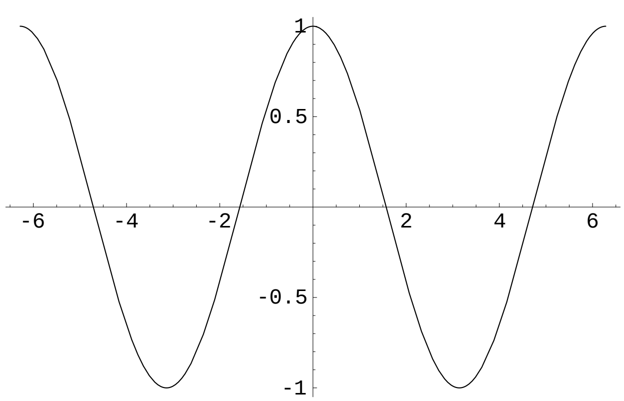

図 2.6: $y = \cos x$ のグラフ

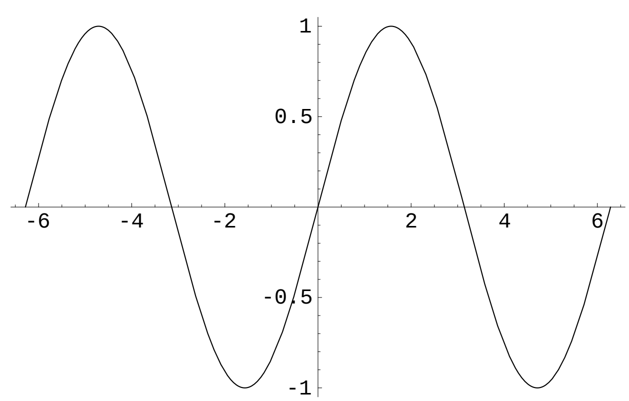

図 2.7: $y = \sin x$ のグラフ

図 2.6 より，$y = \cos x$ のグラフは，y 軸に関して対称である．図 2.7，2.8 より，$y = \sin x, \tan x$ のグラフは原点に関して対称である．

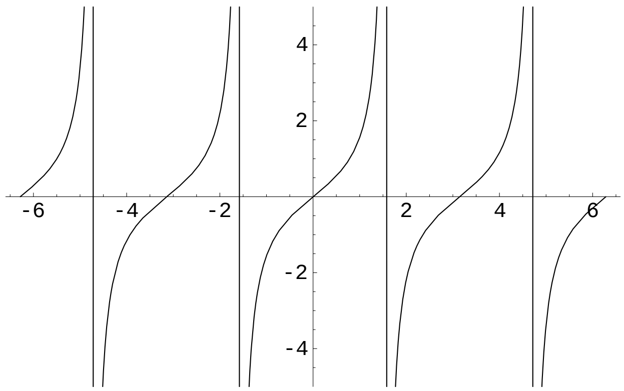

図 2.8: $y = \tan x$ のグラフ

$\cos x$ や $\sin x$ の場合と同様に，偶関数のグラフは y 軸に関して対称，奇関数のグラフは原点に関して対称である．

定理 2.1.3 (三角関数の加法定理)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{2.11}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{2.12}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{2.13}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{2.14}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \tag{2.15}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{2.16}$$

三角関数にはさまざまな性質がある．その中で最も重要なものが加法定理であり，他の多くの性質 (積を和，差に変形する公式，和，差を積に変形する公式，2 倍角の公式，半角の公式等) はこの加法定理から導かれる．

例題 2.1 $\sin\dfrac{\pi}{12}$,　$\cos\dfrac{5\pi}{12}$ の値を求めよ．

解　$\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}$ だから，

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

同様にして，$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

一方，$\cos\dfrac{5\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{6\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12}\right)$ だから，

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

例題 2.2 $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ を $r\sin(x+\theta)$ の形に変形せよ．

解　$\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+\theta) = r\sin x\cos\theta + r\cos x\sin\theta$ より，両辺の $\cos x$ と $\sin x$ の両辺を比較すると[1] $r\sin\theta = -\sqrt{3}$,　$r\cos\theta = 1$．これより，$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ となる．次に，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$,　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は $-\dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ となる．

例題 2.3 $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$ を満たす x の範囲を $0 \le x \le 2\pi$ で求めよ．

解　例題 2.2 より，$2\sin\left(x - \dfrac{1}{3}\pi\right) > 1$，ここで，$0 \le x \le 2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{3} \le x - \dfrac{\pi}{3} \le 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ だから上の不等式を満たす x は $\dfrac{\pi}{6} < x - \dfrac{\pi}{3} < \pi - \dfrac{\pi}{6}$ となる．よって求める範囲は $\dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{7}{6}\pi$ となる．

注意 2.2 a, b を定数とするとき，$a\sin x + b\cos x$ を $r\sin(x+\theta)$ または $r\cos(x+\theta)$ の形に表すことを**三角関数の合成または単振動の合成**という．

2.1.4　指数関数と対数関数

指数

実数 a と正の整数 n について a を n 個掛け合わせたものを a^n で表し, a の **n 乗** とよぶ．この節では，a を正の数として，一般の実数 x に対して定まる数 a^x を考える．この a^x を x の関数と考えたのが**指数関数** (exponential function) である．

最初に, a を正の実数とするとき，a の**べき乗** (power) を次のように定義する．

定義 2.3 n を自然数，m を整数とするとき

$$a^0 = 1 \tag{2.17}$$

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{2.18}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a^m \text{ の } n \text{ 乗根}) \tag{2.19}$$

p を無理数とし，$p = \lim_{n\to\infty} p_n$　($\{p_n\}$ は有理数の数列) とするとき

$$a^p = \lim_{n\to\infty} a^{p_n} \tag{2.20}$$

説明　(1) n が正の整数のとき，n 乗して a となる数，すなわち

$$x^n = a$$

となる数 x を a の **n 乗根** という．

平方根は 2 乗根である．2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ をまとめて**累乗根**という．

一般に，a の n 乗根 について次のことがいえる．

1. n が奇数のとき，a の n 乗根 はただ 1 つである．それを $\sqrt[n]{a}$ で表す．

---

[1] $\cos x$ と $\sin x$ が 1 次独立であることを使っている．

2. n が偶数のとき，$a>0$ の n 乗根 は 2 つある．そのうち正のほうを $\sqrt[n]{a}$ で表す．負のほうは $-\sqrt[n]{a}$ である．$a<0$ のとき， a の n 乗根 は存在しない．

3. 累乗根について次の性質が成り立つ．

定理 2.1.4 (累乗根の性質)

$a>0,\ b>0$ で，n,m が正の整数のとき

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{2.21}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \tag{2.22}$$

(2) 式 (2.19) は a の有理数乗の定義である．平方根 $\sqrt[2]{}$ のときは 2 を省略することが多い．

(3) 式 (2.20) は a の無理数乗の定義で，少し難しい．

「数学 A」で学んだように無理数は循環しない無限小数で表される．たとえば $\sqrt{2}$ を小数で表すと

$$\sqrt{2}=1.414213562373095\cdots$$

とかけるので，有理数の数列 $\{p_n\}$ として

$$p_1=1,\quad p_2=1.4,\quad p_3=1.41,\quad p_4=1.414,\quad p_5=1.4142,\quad p_6=1.41421,\cdots$$

とすると，$\lim_{n\to\infty}p_n=\sqrt{2}$ である．このことを一般化すれば，すべての無理数は有理数からなるある数列 $\{p_n\}$ の極限値として表すことができる．すると各 a^{p_n} は a の有理数乗なので式 (2.18) または (2.19) で定義されて値を求めることができる．たとえば，$a^{\sqrt{2}}$ は数列

$$a^1,\quad a^{1.4},\quad a^{1.41},\quad a^{1.414},\quad a^{1.4142},\quad a^{1.41421},\cdots$$

の極限値として定義される．

次の指数法則が成立する．

定理 2.1.5 (指数法則)

$a,\ b$ を正の実数，$p,\ q$ を実数とするとき，次の指数法則が成り立つ．

$$(1)\ a^pa^q=a^{p+q} \qquad (2)\ (a^p)^q=a^{pq} \qquad (3)\ (ab)^p=a^pb^p$$

$$(4)\ \frac{a^p}{a^q}=a^{p-q} \qquad (5)\ \left(\frac{1}{a^p}\right)^q=\frac{1}{a^{pq}} \qquad (6)\ \left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{a^q}$$

例題 2.4 指数法則を使って次の式を a^pb^q の形にしなさい．

$$(1)\ \sqrt[3]{\sqrt{a^3b^2}\sqrt[4]{ab^{-4}}} \qquad (2)\ \frac{\sqrt[3]{a^2b^5}\sqrt{ab}}{\sqrt[6]{ab^2}}$$

解

$$(1)\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^2}\sqrt[4]{ab^{-4}}}=\sqrt[3]{(a^3b^2)^{\frac{1}{2}}(ab^{-4})^{\frac{1}{4}}}=(a^3b^2)^{\frac{1}{6}}(ab^{-4})^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{2}{6}}a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{-4}{12}}$$

$$=a^{\frac{3}{6}+\frac{1}{12}}b^{\frac{2}{6}-\frac{4}{12}}=a^{\frac{7}{12}}$$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^5}\,\sqrt{ab}}{\sqrt[6]{ab^2}} = \dfrac{(a^2b^5)^{\frac{1}{3}}(ab)^{\frac{1}{2}}}{(ab^2)^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{6}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}}$

$$= a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = ab^{\frac{11}{6}}$$

指数関数

a 正の実数とし，$a \neq 1$ とする．このとき任意の x に対してべき乗 a^x を定義した．そこで指数関数を定義しよう．

定義 2.4 正の実数 a(ただし，$a \neq 1$) に対して，x の関数

$$y = a^x \tag{2.23}$$

を，a を**底**とする**指数関数** (exponential function to the base a) という．

説明　$y = a^x$ のグラフは $a > 1$ に場合と，$a < 1$ の場合とでは様子が異なっている．底 a が 1 より大ならば，正の数 x について $a^x > 1$ であるので，$x_2 > x_1$ を満たす任意の数に対して

$$a^{x_2} = a^{x_2 - x_1}a^{x_1} > a^{x_1}$$

が成り立つ．したがって，指数関数は

1. 定義域は実数全体 $\mathbf{R}$，値域は正の実数全体 $(0, \infty)$
2. グラフは $(0, 1)$ を通り，x 軸がその**漸近線** (asymptote) となる．
3. $a > 1$ ならば，単調増加関数である．すなわち，x が増加すると y も増加し，y が増加すると x も増加する．
4. $0 < a < 1$ ならば，単調減少関数である．すなわち，x が増加すると y は減少し，y が増加すると x は減少する．

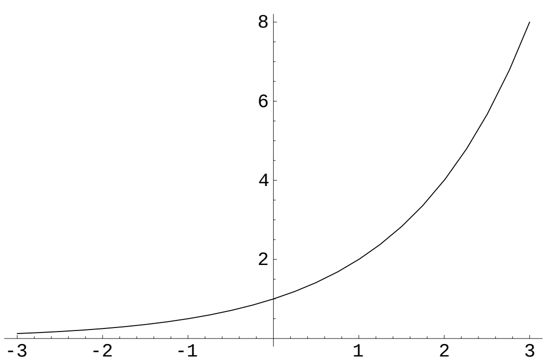

図 2.9: 指数関数 $y = 2^x$

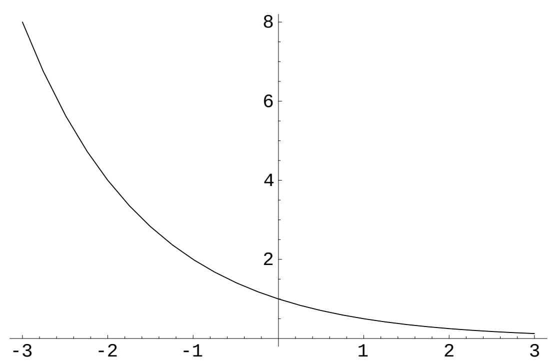

図 2.10: 指数関数 $y = (1/2)^x$

$y = 2^x$ と $y = (1/2)^x = 2^{-x}$ のグラフは x と $-x$ が入れ替わっているから，$y = 2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したものが $y = (1/2)^x$ のグラフである．

一般に，関数 $y = (1/a)^x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したものである．図 2.9 と図 2.10 でこの事実を確認できる．

対数関数

対数関数を指数関数の逆関数として定義しよう．

$a > 1$ とするとき，指数関数 $y = a^x$ のグラフからわかるように，任意の正の実数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ定まる．この p を

$$\log_a M$$

と表し，a を**底**とする M の**対数関数** (logarithmic function to the base a) という．

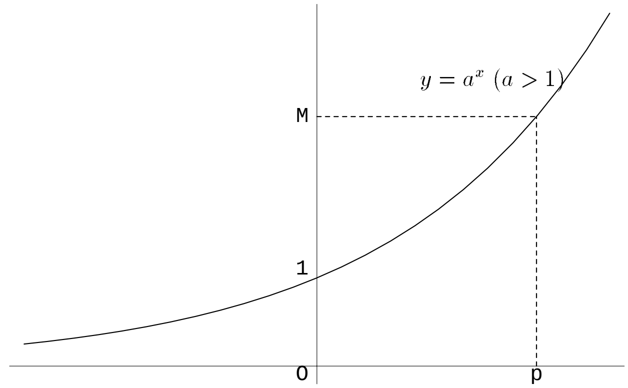

図 2.11: 対数の定義

定理 2.1.6 (対数と指数)
$a > 0,\quad a \neq 1,\quad M > 0$ のとき

$$\boxed{\log_a M = p \Longleftrightarrow a^p = M}$$

例題 2.5 次の式を "$p =$" の式に直しなさい．

$$(1)\ q = a^{2p-1} \qquad (2)\ 3q - 1 = 2^{3p+5}$$

解 (1) $2p - 1 = r$ とおくと，対数の定義から $q = a^r \Longleftrightarrow r = \log_a q \Longleftrightarrow 2p - 1 = \log_a q \Longleftrightarrow 2p = 1 + \log_a q \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}(1 + \log_a q)$
(2) $r = 3p + 5,\quad s = 3q - 1$ とおくと，対数の定義から $s = 2^r \Longleftrightarrow r = \log_2 s \Longleftrightarrow 3p + 5 = \log_2(3q - 1) \Longleftrightarrow p = \frac{1}{3}(-5 + \log_2(3q - 1))$
次の対数法則は，すべて定理 2.1.5 の指数法則より導かれる．

定理 2.1.7 (対数法則)
$a > 0,\quad a \neq 1,\quad p > 0,\quad q > 0$ のとき，次の対数法則が成り立つ．

$$(1)\ \log_a pq = \log_a p + \log_a q$$
$$(2)\ \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q, \quad \log_a \frac{1}{q} = -\log_a q$$
$$(3)\ \log_a q^r = r \log_a q$$

証明 (1) と (3) を証明する．
(1) $M = \log_a p, N = \log_a q$ とおくと，対数の定義より，$p = a^M, q = a^N$ である．したがって，

$$pq = a^M a^N = a^{M+N} \quad (\text{指数法則 (1)})$$

であるので，対数の定義より対数法則

$$M + N = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

が成り立つことがわかる

(3) $N = \log_a q$ とおけば対数の定義より，$a^N = q$．この両辺を r 乗すると，指数法則より

$$(a^N)^r = q^r \Longleftrightarrow a^{Nr} = q^r \Longleftrightarrow Nr = \log_a q^r \Longleftrightarrow r\log_a q = \log_a q^r. \quad \square$$

定理 2.1.8 (底の変換公式)

$a > 0,\quad a \neq 1,\quad b > 0,\quad b \neq 1,\quad c > 0$ のとき次の底の変換公式が成り立つ．

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

証明　$\log_a b = p$ とおけば，対数の定義から $a^p = b$. c を底とする両辺の対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b \Longleftrightarrow p\log_c a = \log_c b \quad (\text{対数法則 } (3))$$

$a \neq 1$ であるから，$\log_c a \neq 0$．ゆえに $p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$．すなわち，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　□.

例題 2.6 次の式を簡単にせよ．

$$(1)(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) \qquad (2)\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$$

解　(1) 対数の底を 2 にそろえる．

$$\begin{aligned}
&(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)\\
&\quad = \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)\\
&\quad = (\log_2 3 + \log_2 3)\left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2\log_2 3}\right) = (2\log_2 3)\frac{5}{2\log_2 3} = 5
\end{aligned}$$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32} = r$ とおく. $\Longleftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^r = \sqrt{32} \Longleftrightarrow 2^{-r} = 2^{\frac{5}{2}}$ ゆえに $-r = \dfrac{5}{2}$ したがって $r = -\dfrac{5}{2}$

対数関数とそのグラフ

x を正の変数とするとき，a を底とする対数関数 $\log_a x$ は x の値に応じていろいろな値をとる．すなわち

$$y = \log_a x$$

は，$x > 0$ の範囲を定義域とする関数である．

対数関数は次の性質を持っている．

1. 対数関数の定義域は正の実数全体 $(0, \infty)$，値域は実数全体 $\mathbf{R}$.
2. グラフは $(1, 0)$ を通り，y 軸がその漸近線である．
3. $a > 1$ のときは，$y = \log_a x$ は単調増加関数である．すなわち

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

4. $0 < a < 1$ のときは，$y = \log_a x$ は単調減少関数である．すなわち

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

対数の定義から，$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$ ここで，指数関数 $y = a^x$ のグラフをもとにして，対数関数のグラフを調べる．$y = \log_a x$ と $x = a^y$ のグラフは同じであり, $x = a^y$ と $y = a^x$ では x と y が入れ替わっている．よって，$y = a^x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したものが $y = \log_a x$ のグラフである．

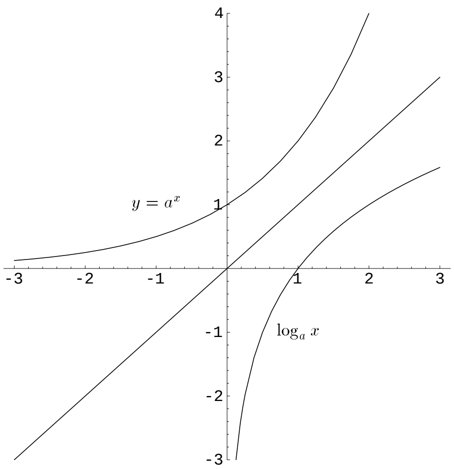

図 2.12: $y = \log_a x \quad (a > 1)$

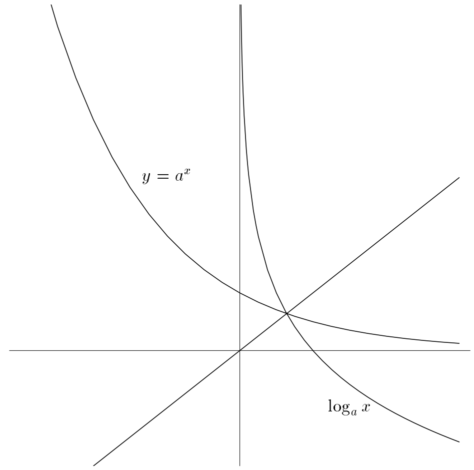

図 2.13: $y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$

2.2　合成関数と逆関数

2.2.1　合成関数

2 つの関数

$$f\ : A \longrightarrow B \quad g\ : B \longrightarrow C$$

が与えられているとき，A に属する任意の x に対して，$y = f(x)$ から B の要素 y がただ 1 つ定まる．また B に属する任意の y に対して，$z = g(y)$ から C の要素 z がただ 1 つさだまる．

このとき，$z = g(f(x))$ であり，これは，A から C への関数 $h\ : A \longrightarrow C$ をさだめる．この関数 h を f と g の**合成関数** (composite function) といい，$h = g \circ f$ と表す．すなわち，

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

である．2 つの関数 f, g を続けて施すことによって得られる関数 $h(x) = g(f(x))$ が f と g との合成関数である．

例 2.6 $f(x) = x + 1, g(x) = \dfrac{1}{x}$ に対し，$y = f(x), z = g(y)$ として

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 + x}$$

また，$y = g(x), z = f(y)$ として

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y) = y + 1 = g(x) + 1 = \frac{1}{x} + 1$$

このように，定義域に含まれるすべての x に対して $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ は成立しないから $g \circ f \neq f \circ g$.

2.2.2 逆関数

関数 $f(x)$ において，定義域ないのある区間 $a \leq x \leq b$ ないの任意の x_1, x_2 について

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

がなりたつとき[2]，関数 $f(x)$ は，この区間において **1 対 1 の関数** (one-to-one function) であるという．

例 2.7 $f(x) = x^2$ は，区間 $-1 \leq x \leq 1$ において，1 対 1 の関数でないが，区間 $0 \leq x < \infty$ では 1 対 1 の関数である．つまり，1 対 1 の関数であるかどうかは，関数の定義域をどう取るかに強く依存している．$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ は実数全体 $\mathbf{R}$ において 1 対 1 の関数である．

関数 $f : A \longrightarrow B$ が 1 対 1 の関数であるとき，B に属する任意の要素 b に対して，A の要素の中で $b = f(a)$ を満たす a がただ 1 つ定まる．

したがって，B に属する任意の y に対して，$y = f(x)$ を満たす A の要素 x を対応させることにより，新しい関数が定められる．定義域を B，値域を A とするこの新しい関数を f^{-1} と表し，もとの関数 f の**逆関数** (inverse function) という．このとき，次のことが成り立つ．

$$\boxed{y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)}$$

ふつうは，独立変数を x で，従属変数を y で表すから，関数 $y = f(x)$ の逆関数は $y = f^{-1}(x)$ と表される．

関数 $y = f(x)$ があり，$x_1 < x_2$ なら $f(x_1) < f(x_2)$ となるとき，すなわちグラフが右上がりのとき (図 2.14)，関数 $y = f(x)$ は**単調増加** (monotone increasing) であるという．反対につねに右下がりの関数を**単調減少** (monotone decreasing)，両方あわせて**単調関数** (monotone function) という．$y = f(x)$ が単調のとき，与えられた数 b に対して，$f(x) = b$ となる x はあっても 1 つしかない．すなわち単調関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 な関数であるから，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在する．逆関数 $y = f^{-1}(x)$ も単調関数である．

例 2.8 (1) $f(x) = x^{2n}$ を実数全体で考える場合，1 対 1 の関数ではない．したがって，逆関数は実数全体では存在しない．ところが，区間 $0 \leq x$ において考えれば単調増加である．よって，$0 \leq x$ での関数 $y = x^{2n}$ の逆関数は $x = f^{-1}(y) = \sqrt[2n]{y} = y^{\frac{1}{2n}}$ $(y \geq 0)$ である．
(2) $f(x) = x^2 - 1$ は区間 $x \leq 0$ において考えれば単調減少であり，値域は $y \geq -1$ である．よって，関数 $f(x)$ には，区間 $x \leq 0$ で，逆関数 $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$ が存在する．

[2]上の命題の対偶は $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ である．

2.2.3　逆関数のグラフ

一般に，関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき，$y = f(x)$ のグラフと，その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの関係を調べてみよう．

$y = f(x)$ のグラフの上の任意の点 $\mathrm{P}(a, b)$ について，$b = f(a)$ がなりたつ．このとき，逆関数の定義から $b = f^{-1}(a)$ である．よって，点 $\mathrm{P}(a, b)$ の x 座標と y 座標を入れ替えて得られる点 $\mathrm{Q}(b, a)$ は逆関数 $f^{-1}(x)$ のグラフの上にある．また，点 $\mathrm{P}(a, b)$ と点 $\mathrm{Q}(b, a)$ は，直線 $y = x$ に関して対称である．したがって，関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である．

定理 2.2.1 (関数とその逆関数のグラフ)
関数 $y = f(x)$ とその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ について，次のことが成り立つ．
1. 定義域と値域が入れ替わる．
2. グラフは直線 $y = x$ に関して対称である．

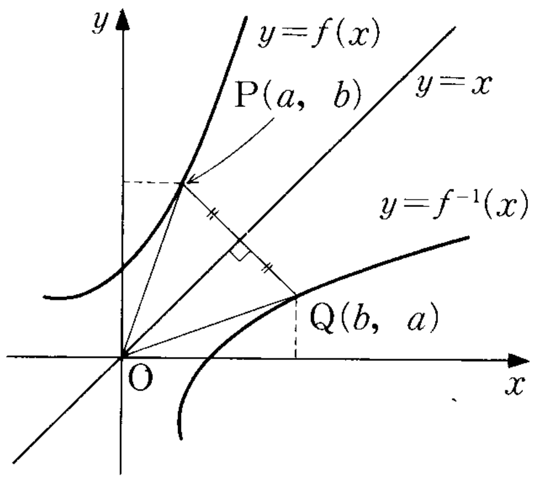

図 2.14: 関数 $y = f(x)$ と関数 $y = f^{-1}(x)$

指数関数 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ は，$1 < a$ ならば単調増加，$0 < a < 1$ なら単調減少である．a^x はつねに正で，値域は $0 < y < \infty$ であるから，逆関数は $y > 0$ で定義される．それが対数関数 $x = \log_a y$ の定義にほかならない． 対数関数の定義域は $y > 0$ で値域は実数全体 $\mathbf{R}$ である．図 2.15 のように指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ とは，互いに逆関数であり，直線 $y = x$ に関して対称である．

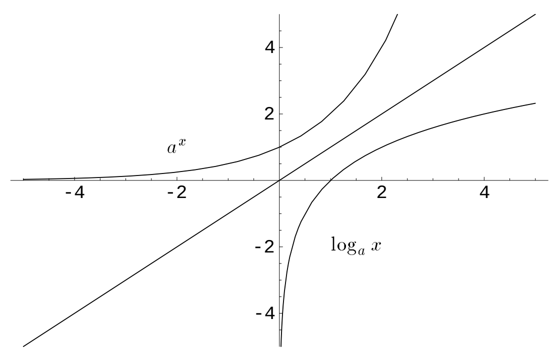

図 2.15: 指数関数 a^x と対数関数 $\log_a x$

また，$y = a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$ のグラフは関数 $y = a^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したものである．

例題 2.7 次の関数の逆関数を求めよ．

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2)$$

また，$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上にかけ．

解

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2) \tag{2.24}$$

は $y = (x-2)^2 + 1$ と変形されるから，関数 $f(x)$ の値域は $y \geq 1$ である．(2.24) を x について解くと $y - 1 = (x-2)^2$ より，$x - 2 \geq 0$ に注意して $x - 2 = \sqrt{y-1}$. これより，求める逆関数は，$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y-1} + 2$ となる．x と y をいれかえて，$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$ である．

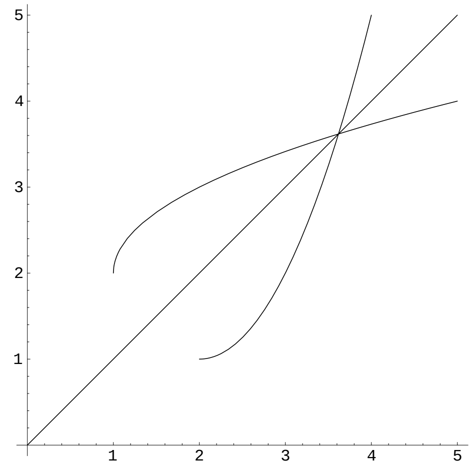

図 2.16: $y = x^2 - 4x + 5$ $(x \geq 2)$ と $y = \sqrt{x-1} + 2$ $(x \geq 1)$

補足　(1) 関数という語は G.W. Leibniz が 1670 年代から用いはじめた．1743 年ごろには A.C. Clairaut や L. Euler は現在の関数記号 $f(x)$ を用いるようになり，Euler は変数と定数から組み立てられる解析的な式として関数を定義している (1745)．P.G.L. Dirichlet は全く”任意な関数”の Fourier 級数による表現に関する論文 (1837) において，$x \in [a, b]$ の関数を考え，”y が全区間において同一の法則にしたがって x に関係することを要しないばかりでなく，その関係が数学的算法で表されると考える必要もない”といい，関数は結局対応に他ならないことを明らかにした．

(2) $y = f(x)$ において，y は**引数** (argument)x において関数 f が**とる** (assume or take on) **値** (value) とよばれる．同値な表現で，f は x を y に**写像する** (map) とか**変換する** (transform) というように言ってよい．関数に対して同義語として使われることのある多くの語のうちに**写像** (map or mapping) とか**変換** (transformation) とか**対応** (correspondence) とか**作用素** (operator) などがある．

(3) 定義域は次のように**区間** (interval) で示されることが多い．端の点を含むか含まないかで記号が異なるので注意.

$[a, b]$ は $a \leq x \leq b$ の範囲
$(a, b]$ は $a < x \leq b$ の範囲
$[a, b)$ は $a \leq x < b$ の範囲
(a, b) は $a < x < b$ の範囲

または**無限区間**の場合は次のように表す.

$[a, \infty)$ は $a \leq x$ の範囲
(a, ∞) は $a < x$ の範囲
$(-\infty, \infty)$ は全実数の範囲

(4) 2 つの関数 f, g が**等しい** (equal) とは，f, g の定義域 A が等しく，すべての $x \in A$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことをいう．このとき，$f = g$ と表す.

2.3　関数の極限

関数 $f(x)$ の定義域内で，x が a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づく ならば，これを $x \to a$ のとき $f(x) \to b$ または

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表し，b を x が限りなく a に近づくときの $f(x)$ の**極限値** (limit) という．

また x が限りなく a に近づくとは，$0 < |x - a|$ が 0 に近づくことであり，$f(x)$ が限りなく b に近づくとは $|f(x) - b|$ が 0 に近づくことである．したがって，

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0$$

また $x \to a$ のとき $f(x)$ の値がどんどん限りなく大きくなっていく場合には ∞ に**発散** (diverge) するといい，どんどん限りなく小さくなっていく場合には $-\infty$ に**発散** (diverge) するという．それぞれ

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

とかく．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ の近くで } f(x) < 0 \text{ かつ } \lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$$

例 2.9　各々の関数の極限値は図 2.17 ~ 図 2.20 において明らかである．

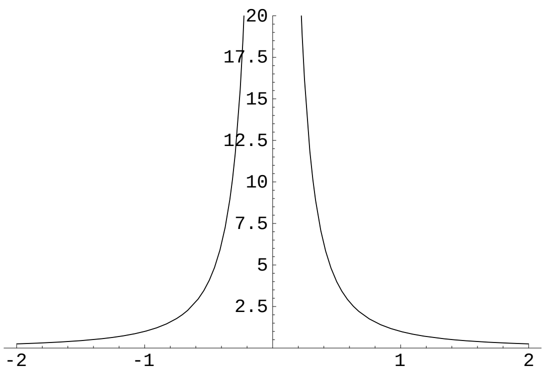

図 2.17: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

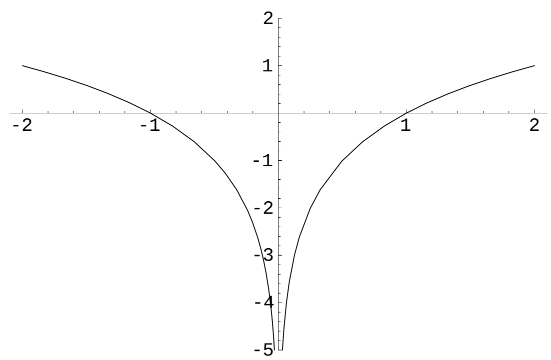

図 2.18: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \log_2 |x| = -\infty$

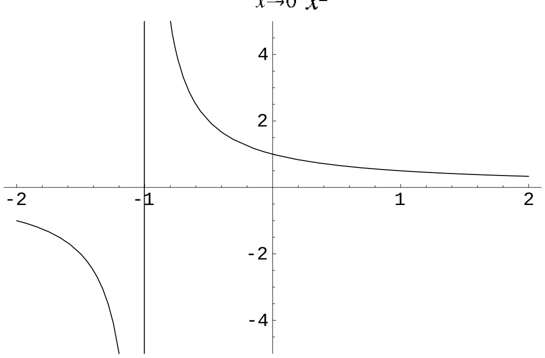

図 2.19: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} = 0$

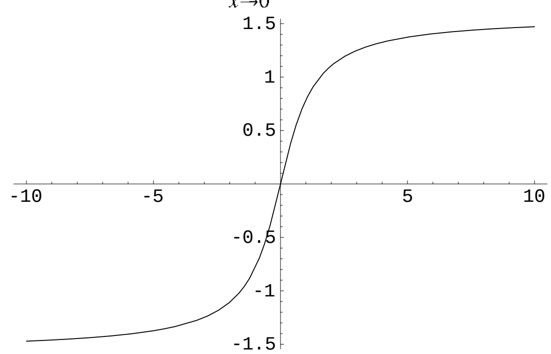

図 2.20: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \pi/2, \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi/2$

ただし，$x \to \infty$ とは，x が数直線上を正の方向へ原点からどこまでも遠ざかっていく状況を表す．

例 2.10 図 2.21 のように関数の極限値をグラフの形から推察することが難しい場合がある．

$$f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

では x が 0 に近づくのに $f(x)$ はいっこうに $f(0)$ に近づいてくれない．たとえば，x が $\{1/n\pi\}$ という数列にのって 0 に限りなく近づけば，それに対応して

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n\pi}) = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0 = f(0).$$

一方，x が $\{1/(2n\pi+\pi/2)\}$ という数列にのって 0 に限りなく近づけば，このとき

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi+\frac{\pi}{2}) = 1 \neq f(0).$$

したがって，$\lim_{x\to+0} f(x)$ は存在しない[a]．同様にして，$\lim_{x\to-0} f(x)$ は存在しない．よって，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

[a] x が 正の値 をとりながら，限りなく 0 に近づくときの極限 (右極限という) を表す．

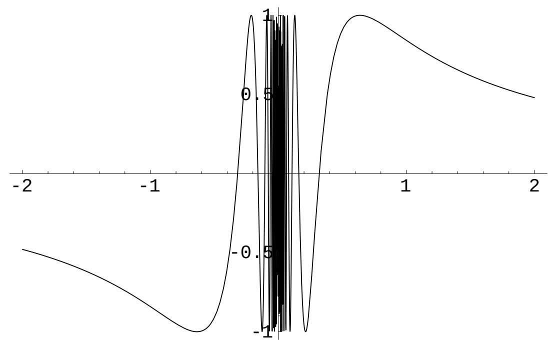

図 2.21: $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

2.3.1 左からの極限，右からの極限

x が $\frac{\pi}{2}$ の左から近づくときには，$\tan x \to \infty$ となる．この状況を

$$\lim_{x\to\pi/2-0} \tan x = \infty$$

とかき，x が $\frac{\pi}{2}$ の 左から近づいたとき の $\tan x$ の極限値は ∞ であるといういいかたをすることがある．ここで，極限値が ∞ であるというのは，実は言葉の誤用であって ∞ という値があるわけではない．

同様に x が $\frac{\pi}{2}$ の右から近づくときには，$\tan x \to -\infty$ となる状況を

$$\lim_{x\to\pi/2+0} \tan x = -\infty$$

と表す．lim の記号の下の $\frac{\pi}{2}-0, \frac{\pi}{2}+0$ は，x が左から，および右からの近づき方を表したものである．この記号は lim に関係したときしか使わない．

一般に，x が a より大きい値をとりながら，限りなく a に近づくことを，x が右から a に近づくといい $x \to a+0$ と表す．また，x が a より小さい値をとりながら，限りなく a に近づくことを，x が左から a に近づくといい $x \to a-0$ と表す．とくに，$a=0$ の場合は $x \to +0, x \to -0$ とかく．

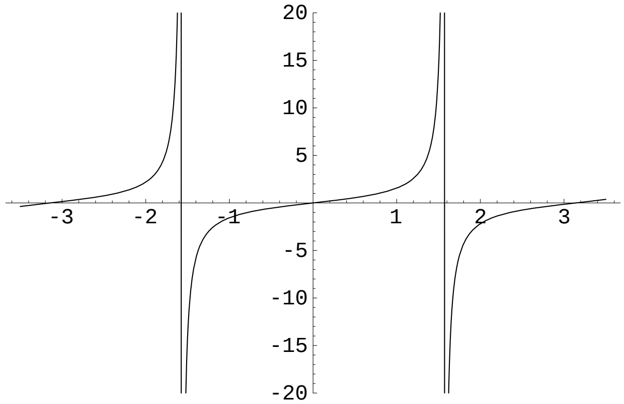

図 2.22: $y = \tan x$

$x \to a+0, x \to a-0$ のときの $f(x)$ の極限をそれぞれ x が a に近づくときの**右からの極限** (right limit)，**左からの極限** (left limit) といい，次のように表す．

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

例 2.11 たとえば $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ という関数に関しては

$x = 2$ のとき $f(x)$ は定義されておらず，$x-2 > 0$ のとき $f(x) = 1$，$x-2 < 0$ のとき $f(x) = -1$ であり，グラフは図 2.23 のようになる．したがって

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 2-0} f(x) = -1$$

となり，$x \to 0$ のとき $f(x)$ は一定の値に近づくとはいえない．だから，$\lim_{x \to 2} f(x)$ は存在しない．

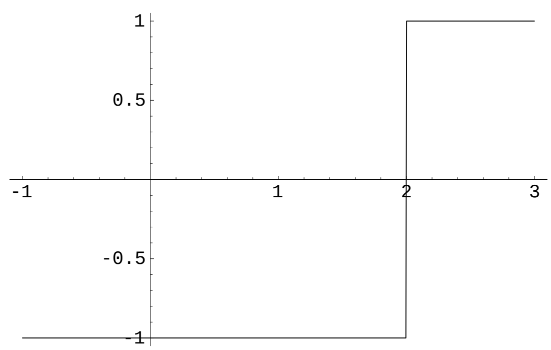

図 2.23: $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$

2.3.2 極限の計算

極限の計算はグラフが使えれば簡単に求められる場合もある，またグラフでは判断できない場合もある．一般に極限の計算には次の公式が用いられる．

定理 2.3.1 (極限操作と四則演算)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \beta$, ただし，$\alpha, \beta$ は有限確定値 のとき

(1) $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$　ただし，k は定数

(2) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$　ただし，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta\neq 0$

(5) **定数関数** (constant function)$f(x)=c$ については $\lim_{x\to a}f(x)=c$ である．

例題 2.8 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$ が成り立つように a,b の値を求めよ．

解　$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ だから $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$ でなければならない．もし $1+a+b\neq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}$ の極限は存在しない．したがって，$1+a+b=0$ より，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+a+1)=1+a+1=3$$

よって，$a=1,b=-2$. この解法では $x\to 1 \iff 0<|x-1|\to 0\quad(x\to 1)$ を使っていることに注意.

検算

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

例題 2.9 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax}+bx)=-\frac{3}{2}$ が成り立つような定数 a,b を求めよ．

解　$y=-x$ とおくと，$x\to-\infty \iff y\to\infty$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax}+bx)\\
&\qquad=\lim_{y\to\infty}(\sqrt{y^2-ay}-by)\\
&\qquad=\lim_{y\to\infty}(\sqrt{y^2-ay}-by)\frac{(\sqrt{y^2-ay}+by)}{(\sqrt{y^2-ay}+by)}\\
&\qquad=\lim_{y\to\infty}\frac{(y^2-ay-b^2y^2)}{\sqrt{y^2-ay}+by}\\
&\qquad=\lim_{y\to\infty}\frac{(1-b^2)y-a}{\sqrt{1-\frac{a}{y}}+b}
\end{aligned}$$

ここで，$\lim_{y\to\infty}(\sqrt{1-\frac{a}{y}}+b)=1+b\neq 0$ に注意する．もし $1-b^2=0$ でなければ分子は $\lim_{y\to\infty}((1-b^2)y-a)=\infty$ または $-\infty$ となって極限値が $-\frac{3}{2}$ とならない．よって $1-b^2=0$.　一方分母は 0 でないから $1+b\neq 0$.　だから，$b=1$.

$$\lim_{y\to\infty}\frac{-a}{\sqrt{1-\frac{a}{y}}+b}=\frac{-a}{1+b}=-\frac{3}{2}$$

より，$a=3$.

検算

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$$
$$= \lim_{y\to\infty}(\sqrt{y^2-3y}-y)$$
$$= \lim_{y\to\infty}(\sqrt{y^2-3y}-y)\frac{(\sqrt{y^2-3y}+y)}{(\sqrt{y^2-3y}+y)}$$
$$= \lim_{y\to\infty}\frac{(y^2-3y-y^2)}{\sqrt{y^2-3y}+y}$$
$$= \lim_{y\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{y}}+1} = \frac{-3}{1+1}.$$

例 2.12 $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)$ を求めよ．
$\lim_{x\to\infty}3^x=\infty, \lim_{x\to\infty}2^x=\infty$ であるから，定理 2.3.1 の (2) $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)=\lim_{x\to\infty}3^x-\lim_{x\to\infty}2^x=\infty-\infty$ は成り立たない．$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$ だから，$\lim_{x\to\infty}3^x\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}=\infty$．もっと明確な証明は次の節で扱う極限値の大小関係を使うものである．すなわち，$x>2$ で $(3/2)^x>2$ だから $(3/2)^x-1>1$．したがって

$$(3^x-2^x)=2^x\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right\}>2^x \quad (x>2)$$

ここで，$x\to\infty$ のとき 2^x は限りなく大きくなっていくのだから 2^x よりおおきい 3^x-2^x も限りなく大きくなる．したがって $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)=\infty$.

2.3.3 極限と順序関係

関数の極限と実数の順序関係については，次のことが成り立つ．

定理 2.3.2 (挟みうちの原理)
(1) $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha, \quad \lim_{x\to a}g(x)=\beta$, ただし，$\alpha,\beta$ は有限確定値 のとき
a に十分近い x に対して，つねに $f(x)\leq g(x)$ ならば，$\alpha=\lim_{x\to a}f(x)\leq\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ が成り立つ．
(2) $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ のとき
a に十分近い x に対して，つねに $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ ならば，$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$ が成り立つ．

注意 2.3 「数学 III」で習ったように挟みうちの原理は数列の場合にも同様に成り立つ．Archimedes は紀元前 1 つの弦で限られた放物線の截片の面積を精密な論法で求めたが，そこでは数列に関する挟みうちの原理が使われている．

挟みうちの原理を使って次の極限公式を証明する．この公式は三角関数の微分を考えるときに必要である．x はラディアンでないと成立しないので注意せよ．$y=\dfrac{\sin x}{x}$ は $x=0$ では定義されていない．図 2.24 からグラフは $x=0$ で切れ目なくつながっているように見える．グラフからは $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が予測される．

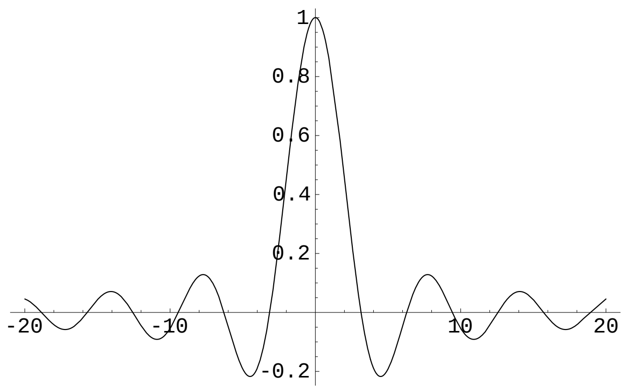

図 2.24: $y = \dfrac{\sin x}{x}$

定理 2.3.3

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

証明

まず $x > 0$ とする．図 2.25 のように，中心 O, 半径 1 の円周上に $\angle AOB = x$ となる B をとる．次に OB の延長上に $\angle OAT$ が直角となる点 T をとる．そして $\triangle OAB$, 扇形 OAB, $\triangle OAT$ の面積を比較すると

$$\triangle OAB < \text{扇形 } OAB < \triangle OAT$$

である．各面積を計算して代入すると

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$$

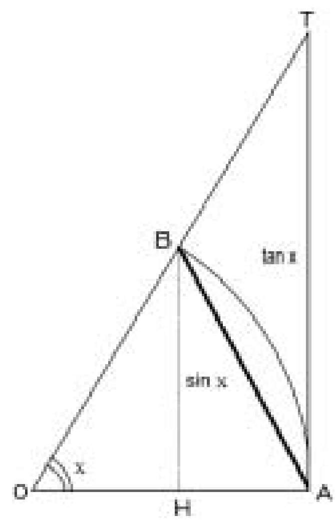

図 2.25:

$\tan x = \cos x / \sin x, \sin x > 0$ なので

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

挟みうちの原理より $\displaystyle\lim_{x \to +0} \cos x \leq \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to +0} 1$. $\displaystyle 1 \leq \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$ だから $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
$x < 0$ のときは $x = -y$ とおくと $y \to +0$ だから

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \to +0} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \to +0} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y \to +0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

いずれの場合にも 1 に収束するので定理が成立する．□

補足 (1) 同じ定義域で定義されている 2 つの関数 f と g が与えられたとき，各点 x でとる値に四則演算をほどこすことによって，新しい 4 つの関数 $f+g, f-g, fg, f/g$

が作られる．

$$
\begin{aligned}
&\text{和}:f+g \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)\\
&\text{差}:f-g \quad (f-g)(x)=f(x)-g(x)\\
&\text{積}:fg \quad (fg)(x)=f(x)g(x)\\
&\text{商}:\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ただし，} g(x)\neq 0
\end{aligned}
$$

この式の意味は，たとえば $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ は，$f+g$ という関数の点 x でとる値を，実数 $f(x)$ と $g(x)$ の和と定義している．右辺の $f(x)+g(x)$ における + は実数の和を意味し，左辺の $f+g$ における + は関数の和を意味する．同じ記号を使っているがその意味は異なる．演算子 + の**多重定義** (overloading) といわれる．

関数の中でも四則演算が可能である．この関数の演算は，いま見たように実数の四則演算から引き継がれたものである．2 つの基本関数 $I(x)=x, f(x)=c$ すなわち，**恒等関数** (identity function) と定数関数から関数の四則演算を使って作られる関数のクラスを考えてみよう．$I(x)$ の積から $x^n, n\in\mathbf{N}$ が作られる．さらに定数関数と和または差の演算から 2 次関数 ax^2+bx+c ができる．このようにして n 次の**多項式** (polynomial) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ができる．ここまでは和，差および積の演算しか使っていない．商の演算まで使うと「数学 III」で習う**分数関数** (meromorphic function) が得られる．たとえば，$2x+5$ と x^2+1 の商は $\dfrac{2x+5}{x^2+1}$ である．しかし，関数の四則演算を有限回使って対数関数，指数関数や三角関数を作ることはできない．このような関数を**超越関数** (transcendental function) という．

(2) 定理 2.3.1 は関数の四則演算と極限操作との関係を表す法則である．すなわち

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)\\
&\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)\\
&\lim_{x\to a}(fg)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)\\
&\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}
\end{aligned}
$$

2.4 連続関数

これまで学んできた多項式，分数関数 (有理関数)，指数関数，対数関数，三角関数のもっている基本的性質を詳しく調べていく．ここでは「関数が連続的に変化している」という性質に焦点をあてて，この**連続性** (continuity) ということを明確にすることが目的である．

直感的には $y=f(x)$ のグラフが $x=a$ においてつながっているとき，$f(x)$ は $x=a$ において**連続** (continuous) であるという．しかし，関数 $y=f(x)$ のグラフは一般に明示できるとは限らないし，またどれだけ正確に書かれているかもよくわからない．図 2.21 をみて $y=\sin\dfrac{1}{x}$ は $x=0$ でグラフがつながっている，と判定できるだろうか？　グラフを見ている限り答えるすべはないのである．

関数 $y=f(x)$ が $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ という性質を満たすとき，$x=a$ で連続であるという．すなわち，x が a に近づくとき，f によって対応する値 $f(x)$ もまた $f(a)$ に近づくとき，f は $x=a$ で連続であると

いう．この意味で，a における連続性とは f が a において限りなく近づくという性質を保存することであるといってよい．また

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)} \tag{2.25}$$

であるから，$\lim\limits_{x\to a}$ と f の順序を交換できるとき連続であるといってよい．(2.25) はよく使われる公式である．

2.4.1　関数の四則演算と連続性

関数の四則演算は，実数の四則演算から引き継がれたものである．いま，f と g が点 a で連続であるとき，$f+g, f-g, fg$ がまた点 a で連続となるかということは，この段階では明らかでない．しかし，次の定理が成り立つ．

定理 2.4.1 (関数の四則演算の連続性)
関数 $f(x)$ と $g(x)$ は $x=a$ で連続とする．このとき関数

$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{ただし } g(a)\neq 0 \text{ とする})$$

も，$x=a$ で連続である．

証明
定理 2.3.1 で $\alpha = f(a), \beta = g(a)$ とおく．証明すべきことはこれから $x \to a$ のとき，

$$f(x)+g(x) \to f(a)+g(a), f(x)-g(x) \to f(a)-g(a), f(x)g(x) \to f(a)g(a), \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$$

が成り立つことを示すことである．しかし，これは定理 2.3.1 に他ならない．□

注意 2.4 スカラー倍 kf はもちろん $x=a$ 連続である．しかし，スカラー倍は定数関数 $g(x)=k$ と関数 $f(x)$ の積と考えることができるので，定理 2.4.1 に含まれる．

恒等関数 $I(x)=x$ と定数関数 $f(x)=c$ はすべての点で連続であるから，この定理から次のことがわかる．

例 2.13 $I(x)$ の積から $x^n, n \in \mathbf{N}$ が作られる．さらに定数関数と和または差の演算から 2 次関数 ax^2+bx+c ができる．このようにして n 次の 多項式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ができる．したがって，n 次の多項式はすべての実数で連続である．一方，商の演算まで使って作られる分数関数，たとえば，$\dfrac{ax+c}{x-c}$ は $x \neq c$ であるすべての実数で連続である．

また次の事実は関数のグラフを考えれば明らかであるが,「解析 I」では証明を必要とする内容である．

例 2.14 (1) 三角関数 $\sin x, \cos x$ はすべての実数で連続．$\tan x$ は $\cos x \neq 0$ である実数で連続.
(2) 指数関数 $a^x, (a\neq 1, a>0)$ はすべての実数で連続．　対数関数 $\log_a x$ は $x>0$ において連続.

注意 2.5 $\cos x$ と $\log x$ が定義域の各点で連続であることの証明は「解析演習問題集」の例題 1.4 を参照せよ．

ここで，関数 $f(x)$ が，考えている範囲のすべての点で連続のとき，f は連続である，または**連続関数** (continuous function) であるという．

関数が連続であるとは，1 点 1 点で連続である状況が，いたるところで成り立っていることである．直観的には $y = f(x)$ のグラフが切れ目なくつながっていることを意味する．

例 2.15 関数の和と積の例を図 2.26 にしめす．商の場合は分母が 0 となる点で連続でなくなる (図 2.24)．

関数 $I(x) = x$ と $f(x) = \sin x$ はともに実数全体で連続であるから，関数の和 $(I + f)(x) = x + \sin x$ と積 $(If)(x) = x \sin x$ も実数全体で連続である．関数 $y = (I + f)(x), (If)(x)$ のグラフは図 2.26 のようになる．

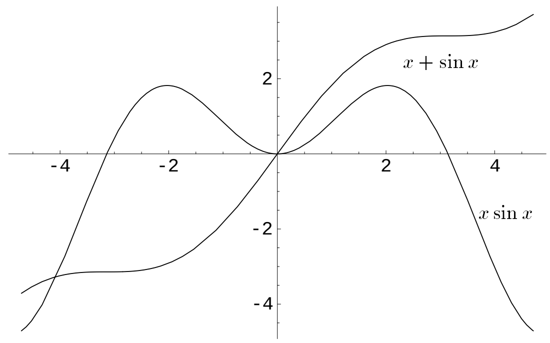

図 2.26: $(I + f)(x) = x + \sin x, (If)(x) = x \sin x$

例題 2.10 図 2.27 の関数の連続性を考察せよ．

解 図 2.27 において $x = a_1$ では $\lim\limits_{x \to a_1 + 0} f(x) = b_1 = \lim\limits_{x \to a_1 - 0} f(x)$ だから $\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = b_1$ しかし，$f(a_1) = 0$ なので $y = f(x)$ は $x = a_1$ では連続ではない (**不連続**ともいう)．さらに $x = a_2$ においては，x を a_2 の右から近づけてみる．このとき，$\lim\limits_{x \to a_2 + 0} f(x) = c$．$x$ を a_2 の左から近づけてみる．このとき，$\lim\limits_{x \to a_2 - 0} f(x) = b_2$．したがって，$x$ を a_2 に近づけたとき，その近づけ方により極限値が異なってしまうので $\lim\limits_{x \to a_2} f(x)$ は存在しない．だから $y = f(x)$ は $x = a_2$ で連続でない．その他の点では連続である．

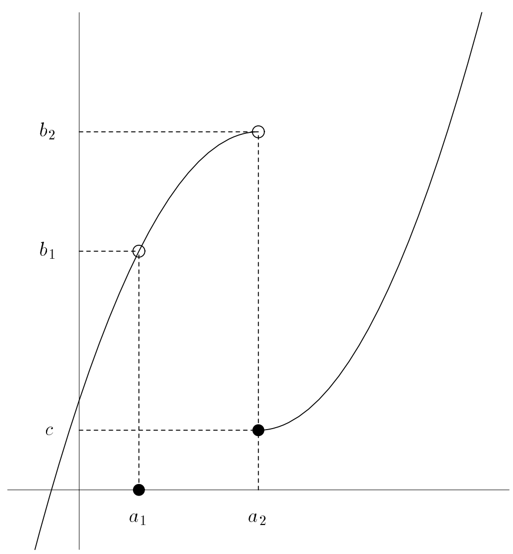

図 2.27:

補足

合成関数の極限値を計算する場合に役立つに定理を述べる．

定理 2.4.2

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = b$ であり，$g(y)$ が点 b で連続ならば，$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$. $g(y)$ が点 b で不連続なるときは成立しない．

(2) 2 つの連続関数 $f(x)$ と $g(x)$ から作られる合成関数 $(f \circ g)(x)$ は連続関数である．

この定理より，次の公式が成り立つ．

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)| = |f(\lim_{x\to a} x)|.$$

逆関数の連続性については

定理 2.4.3

(3)$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であり，単調増加 (減少) 関数ならば，区間 $[f(a), f(b)]([f(b), f(a)]$ で連続であり，単調増加 (減少) 関数であるような逆関数 $f^{-1}(x)$ がただ 1 つ存在する．

関数 $y = f(x)$ とその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称である．したがって，つながったグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動してもつながっているから，この定理は直観的には明らかである．

2.4.2　中間値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ すなわち $a \leq x \leq b$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ であるとき，関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ すなわち $a \leq x \leq b$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ であるとき，$y = f(x)$ のグラフは図 2.28 のように，点 $(a, f(a))$ から $(b, f(b))$ 間で切れ目なくつながっている．このことから，次の定理が成り立つ．

定理 2.4.4

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ とする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間のどんな値 α に対しても

$$f(c) = \alpha, \quad a < c < b$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する．

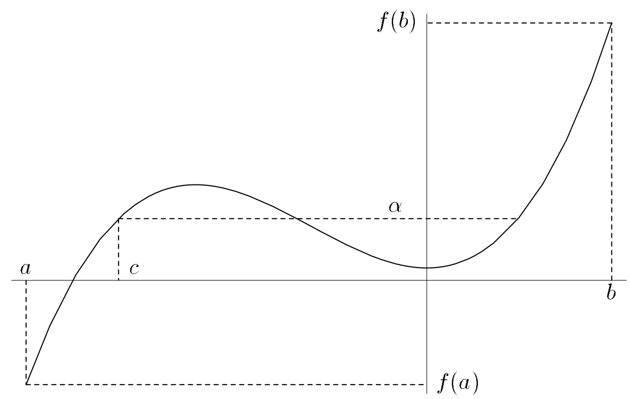

図 2.28: 中間値の定理

中間値の定理から次のことがわかる．

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，方程式 $f(x) = 0$ は a と b の間に少なくとも 1 つの実数解を持つ．

例題 2.11 方程式 $x - \cos x$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示せ．

解　$f(x) = x - \cos x$ とおく．$f(x)$ は $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ で連続である．

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$$

したがって，中間値の定理から，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x) = 0$ となる x が少なくとも 1 つ存在する．すなわち，方程式 $x - \cos x$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つ．

注意 2.6 実数の全体と，隙間のない直線とを同一視する直観的な立場からすれば中間値の定理は当たりまえのことであり，証明するまでもない．

第3章　微分法

3.1　微分法

3.1.1　微分係数と導関数

微分係数

関数 $f(x)$ は，ある区間の上で定義されているものとする．定義域の 1 点 a において，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は，点 a において**微分可能** (differentiable) であるという．この極限値を $f'(a)$ とかき，f の a における**微分係数** (diffrential coefficient) という．すなわち

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

である．図 3.1，図 3.2 で示したような，$y=f(x)$ のグラフでは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{3.1}$$

は，割線 PQ の傾きを示している．図 3.1 は $h>0$ のときであり，図 3.2 は $h<0$ のときである．h が右から 0 に近づいても，左から 0 に近づいても，この割線の傾きが一定の値に近づくとき，f は a で微分可能というのである．

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,f(a))$ を通って，傾きが $f'(a)$ の直線を，P を通るこのグラフの**接線** (tangent line) という．接線の方程式は

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)} \tag{3.2}$$

である．

図 3.3 のように，(3.1) の極限値が $h>0$ と $h<0$ から近づいたとき異なる場合，この左と右からの極限に名前をつけておきたい．そのためには

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$f'_-(a)=\lim_{x\to a-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

という記号を用い，それぞれ $x=a$ における f の **右微分係数** (right differential coefficient)，**左微分係数** (left differential coefficient) という．$f'_+(a)$ と $f'_-(a)$ が有限確定値でさらに $f'_+(a)=f'_-(a)$ のとき，f は a で微分可能である．

関数 $f(x)$ が，定義域の各点 x で微分可能のとき，$f(x)$ は**微分可能な関数** (differentiable function)，または**可微分関数**であるという．ただし，$F(x)$ の定義域が閉区間 $[a,b]$ のときには，端点 a,b での微分可能性とは，$f'_+(a), f'_-(b)$ が存在することである．

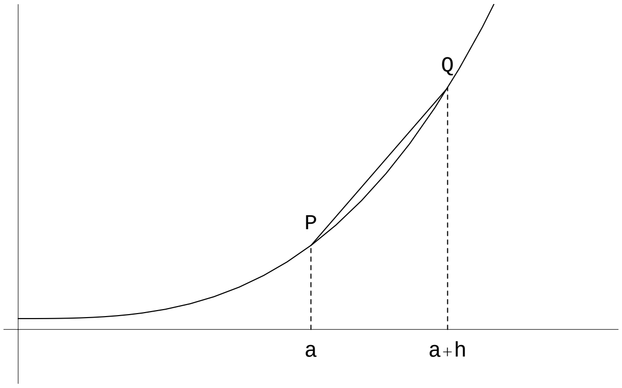

図 3.1: $h > 0$

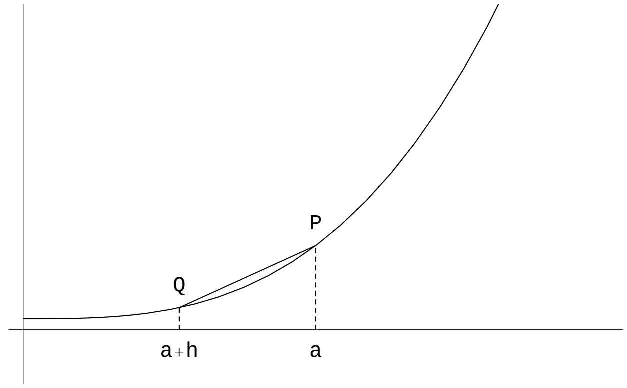

図 3.2: $h < 0$

図 3.3 のように点 a で角を持つ場合を考える．割線 PQ の傾きは正で h が右から近づいたときの (3.1) の極限は，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$ である．また割線 PQ’ の傾きは負で h が左から近づいたときの (3.1) の極限は，$\displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$ である．したがって，(3.1) の極限は存在しないから f は a で微分可能ではない．

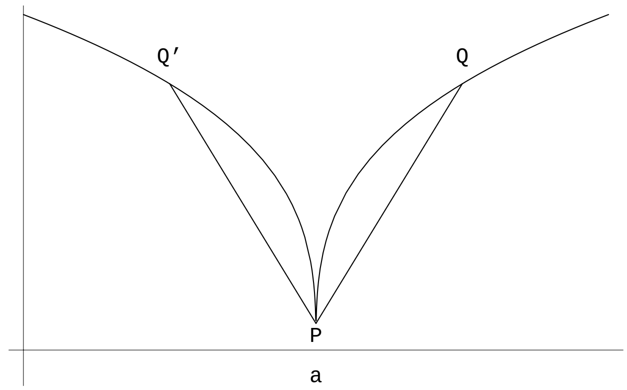

図 3.3: 点 a で角 (カド) のある関数

導関数

$f(x)$ が微分可能なときには，各点 x で f の微分係数 $f'(x)$ を考えることができる．

$$x \longrightarrow f'(x)$$

を 1 つの関数とみなして，これを f の**導関数** (derived funvtion, derivative) といい，f' によって表す．関数 $y = f(x)$ の導関数の記号は $f'(x)$ のほかに

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad Df(x)$$

などが用いられる．

例題 3.1 (1) 関数 $f(x) = x^3$ のグラフにおいて $x = 2$ における微分係数を定義にしたがって求め，その点における接線の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ を定義にしたがって微分せよ．

解 (1)

$$\begin{aligned} f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3-2^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3\cdot 2^2+3\cdot 2h) = 12 \end{aligned}$$

したがって，接線の方程式は $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ より，$y = 12x - 16$.

$$(2)\ f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}\frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (3.3)$$

定理 3.1.1 (微分可能と連続)
関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば， $f(x)$ は $x = a$ において連続である.

証明
$f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば，$f'(a)$ が存在し，$x = a$ の近くでは $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ の値はほとんど $f'(a)$ に等しいから

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \epsilon$$

とおけば，$x \to a$ のとき，$\epsilon \to 0$ である．さらに極限の性質 (定理 2.3.1) から

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\{f(a) + (x-a)(f'(a)+\epsilon)\}$$
$$= f(a) + 0 \times f'(a) = f(a)$$

となり，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ である．すなわち，$f(x)$ は $x = a$ において連続である.

注意 3.1 (1) 定理 3.1.1 の対偶は ”$f(x)$ が $x = a$ で連続でなければ，$x = a$ で微分可能でない．”

(2) この定理の逆は成り立たない．すなわち，関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であっても，$x = a$ で微分可能とは限らない．たとえば，関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続であるが，角を持つので微分可能ではない．すなわち，

$$f'_+(0) = \lim_{x\to +0}\frac{|0+h|}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{h}{h} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to -0}\frac{|0+h|}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{-h}{h} = -1$$

である.

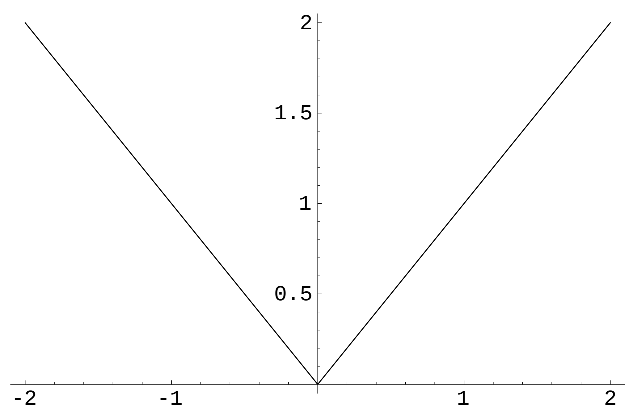

図 3.4: $f(x) = |x|$

補足

(1) t が時間を表し，関数 $f(t)$ が時刻 t における動点の位置を表すものとすれば，導関数 $f'(t)$ はこの動点の**速度** (velocity) を表す． 動点の**加速度** (acceleration) は速度の導関数 $f''(t)$ である．もう少し詳しく述べれば，$\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ は時刻 $t \sim t+h$ の**平均速度** (the average velocity) を表し，その極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)$ は時刻 t における**瞬**

間速度 (the instantaneous velocity) を表す.

(2) 関数のグラフが点 a で角を持つとき，すなわち左右の微分係数が異なった値を持つとき，その点 a で微分できない．しかしながら，微分ができるか，できないかをグラフの形から推察することは難しい場合もある.

1. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ と $g(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ のグラフを図 3.4 図 3.5 に書いておいた．このグラフの形からもわかるように二つの関数は連続である．一方，$x = 0$ で微分できるか，できないかをグラフから知ること難しい．$f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ は $x = 0$ で微分可能でないが，$g(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ は $x = 0$ で微分可能である.

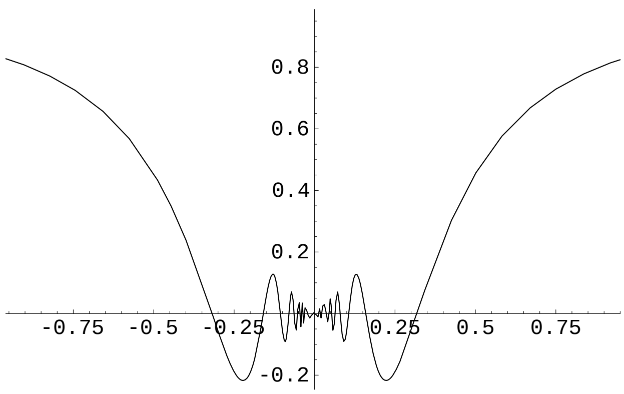

図 3.5: $x\sin\dfrac{1}{x}$

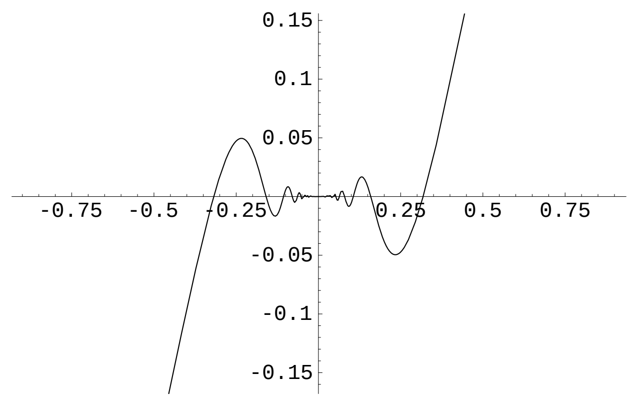

図 3.6: $x^2\sin\dfrac{1}{x}$

3.1.2　関数の積，商の微分法

導関数に関して成立するいくつかの公式について照明しておこう.

定理 3.1.2 (スカラー倍と和の微分公式 (微分演算の線形性))
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I において微分可能なとき，$kf(x)$ (k は定数) と $f(x)+g(x)$ も I で微分可能であり次の公式が成り立つ.

(1) $\{kf(x)\}' = k\{f(x)\}'$　(2) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$

証明
仮定より $f'(x), g'(x)$ は存在する．このことを利用して微分の定義の式に代入し, 公式を導くと

$$
\begin{aligned}
(1)\ \{kf(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k\{f(x+h)-f(x)\}}{h} \\
&= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \{f(x)\pm g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)\pm g(x+h)\}-\{f(x)\pm g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}\pm\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+x)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)\pm g'(x)\quad \text{複合同順}\square
\end{aligned}
$$

定理 3.1.3 (積と商の微分公式)

$f(x), g(x)$ がある区間 I において微分可能なとき，$f(x)g(x), f(x)/g(x)$ ただし $g(x) \neq 0$ も I で微分可能であり, 次の公式が成立する.

$$(1)\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(2)\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

証明

仮定より $f'(x), g'(x)$ は存在する．このことを利用して公式を導く.

$$\begin{aligned}
(1)\ \{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}\lim_{h\to 0}g(x+h) + f(x)\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

ここで $g(x)$ は微分可能であるから連続で $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ が成り立つ.

(2) ここでは微分の定義を使わないで，積の微分公式を使った証明をしてみよう.

$$g(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = 1$$

の両辺を x で微分する．このとき左辺の微分には積の微分公式を使う.

$$\left(g(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + g(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = 0$$

移項して

$$g(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

両辺を $g(x)$ で割って

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

この結果を用いて略記してかくと

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' &= f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' \\
&= f'\cdot\frac{1}{g} - f\cdot\frac{g'}{g^2} \\
&= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

これで (2) が示された.

例題 3.2 n が自然数または 0 のとき $(x^n)' = nx^{n-1}$ を証明せよ．

解　数学 A で習った 2 項定理を利用する:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} {}_nC_k a^k b^{n-k}, \quad {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

微分の定義から

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{k=n} {}_nC_k h^k x^{n-k} - x^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}({}_0C_n x^n + {}_1C_{n-1} h x^{n-1} + {}_2C_{n-2} h^2 x^{n-2} + \cdots {}_nC_0 h^n - x^n) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h x^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

例題 3.3 次の関数を微分せよ．

(1) $f(x) = x(x^3 + 3x^2 + 4)$,　(2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5 - x^3}$

解

$$\begin{aligned}
(1) f'(x) &= x'(x^3 + 3x^2 + 4) + x(x^3 + 3x^2 + 4)' \\
&= (x^3 + 3x^2 + 4) + x\{(x^3)' + (3x^2)' + (4)'\} \\
&= x^3 + 3x^2 + 4 + x(3x^2 + 6x + 0) = x^3 + 3x^2 + 4 + 3x^3 + 6x^2 = 4x^3 + 9x^2 + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) f'(x) &= \left(\frac{x^2+1}{x^5-x^3}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^5-x^3) - (x^2+1)(x^5-x^3)'}{(x^5-x^3)^2} = \frac{2x(x^5-x^3) - (x^2+1)(5x^4-3x^2)}{(x^5-x^3)^2} \\
&= \frac{-3x^4 - 4x^2 + 3}{x^4(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

注意 3.2 n 次の多項式関数 $y = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ のグラフの概形を考えよう．この関数を

$$y = x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

と書き直してみる．$|x| \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^3}, \cdots$ は 1 に比べて急速に小さな数になっていくので，上の式の右辺の括弧の中で，2 項目以下の影響はほとんど無視できる．したがって $|x| \to \infty$ のとき y のグラフは大体 $y = x^n$ のグラフの形に近くなる．だから，n が偶数か奇数かで，まったく違った形になる．

一方，$y' = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots$ は $n-1$ 次式で，$y' = 0$ となる x は高々 $n-1$ 個しかない．したがって y が極大値か極小値をとる場所は，高々 $n-1$ 個しかない．このことから n 次多項式の概形は図 3.7，図 3.8 のようになることがわかる．

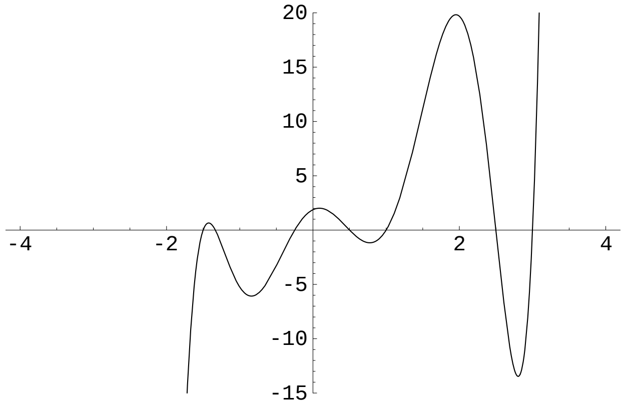

図 3.7: 7 次多項式のグラフの例

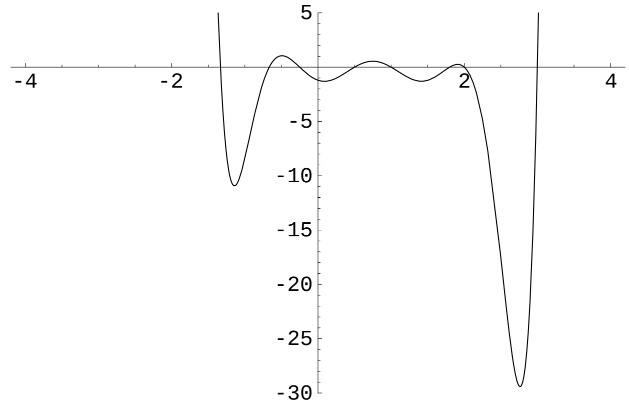

図 3.8: 8 次多項式のグラフの例

注意 3.3 有理関数

$$y = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

のグラフについて考えよう．分母が $x = \alpha$ で 0 になるとき，もし分子がそこで同時に 0 にならなければ (すなわち，分母と分子に共通因子 $(x - \alpha)$ がなければ)，グラフは $x = \alpha$ の近くで図 3.9，図 3.10 のようになる．x が α に近づくとき，分母はいくらでも小さくなり, $|y|$ の値は限りなく大きくなる．このような場所は，分母が 0 となる場所だから，高々分母の次数 m 個しかない．

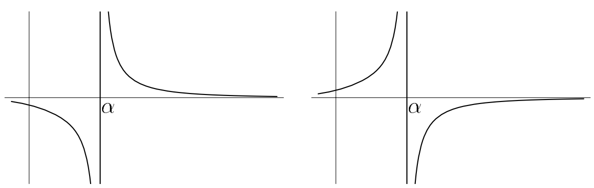

図 3.9: $x = \alpha$ の近くのグラフ

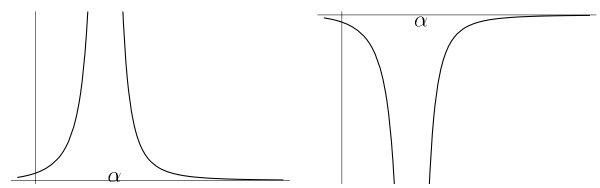

図 3.10: $x = \alpha$ の近くのグラフ

また,

$$y' = \frac{(x^n + \cdots)'(x^m + \cdots) - (x^n + \cdots)(x^m + \cdots)'}{(x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m)^2}$$

から，y' の分子は高々 $n+m-1$ 次式である．y の増減の様子は，y' の符号から調べられるが，分母は常に正であるから，分子の符号の変化する状況を調べるとよい．y' が 0 となる所は高々 $n+m-1$ 個の点だから，y' の符号が +0−, −0+ と変わる場所も高々 $n+m-1$ 個である．したがって y のグラフが波打つ場所も高々 $n+m-1$ だけである．

$|x|$ が大きくなるときの模様は,

1. $m > n$ ならば，$|x| \to \infty$ のとき，$y \to 0$.
2. $m = n$ ならば，$|x| \to \infty$ のとき，$y \to 1$.
3. $m < n$ ならば，$|x| \to \infty$ のとき，グラフはしだいに $y = x^{n-m}$ のグラフの様子に近づいてくる．したがって $n - m$ が偶数か, 奇数かで形が大きく違う.

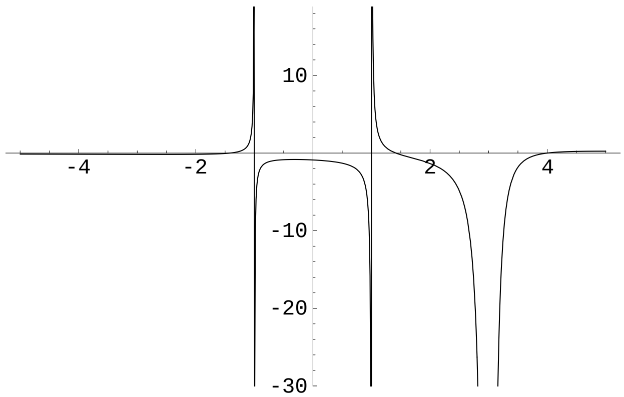

図 3.11: $y = \frac{(x^2-2)(x-4)}{(x^2-1)(x-3)^2}, m > n$

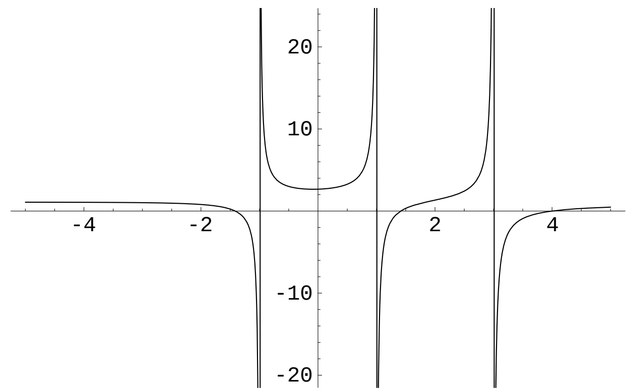

図 3.12: $y = \frac{(x^2-2)(x-4)}{(x^2-1)(x-3)}, m = n$

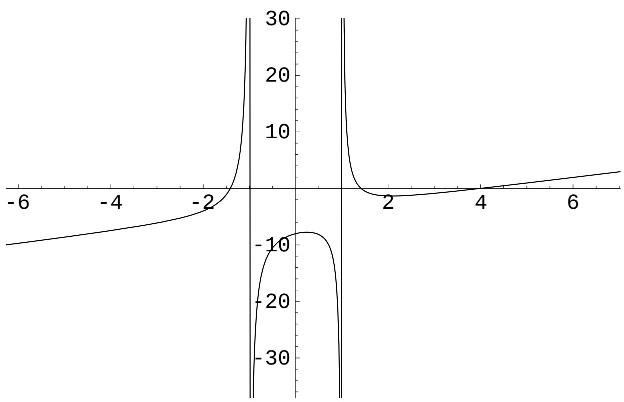

図 3.13: $y = \frac{(x^2-2)(x-4)}{(x^2-1)}, m < n : n - m = 1$

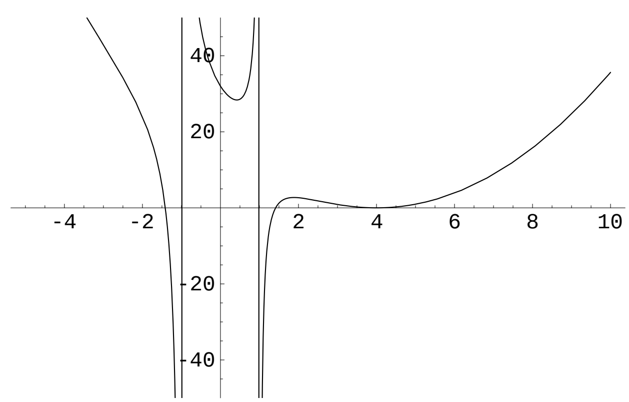

図 3.14: $y = \frac{(x^2-2)(x-4)^2}{(x^2-1)}, m < n : n - m = 2$

3.2　いろいろな関数の導関数

3.2.1　三角関数の微分

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \tag{3.4}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta \tag{3.5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha \tag{3.6}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{3.7}$$

で，

$$\alpha = x + \frac{h}{2}, \quad \beta = \frac{h}{2}$$

とおくと，$\alpha + \beta = x + h, \alpha - \beta = x$ だから，(3.4) から (3.5) を引くと

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos(x + \frac{h}{2})$$

(3.6) 式と (3.7) 式で，α,β を同じように置き換えてから (3.6) 式から (3.7) 式をひくと，今度は

$$\cos(x+h) - \cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin(x + \frac{h}{2})$$

がえられる．

$\sin \mathbf{x}, \cos \mathbf{x}$ の微分

これらの結果と微分の定義，定理 2.3.3 を用いると，$y = \sin x, y = \cos x$ の導関数をすぐに求めることができる．実際，次の公式が成り立つ．

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

証明

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\end{aligned}$$

ここで $k = \frac{h}{2}$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ で

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k} = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\cos(x + \frac{h}{2}) = \cos(x + \lim_{h\to 0}\frac{h}{2}) = \cos x$$

だから

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k}\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2}) = 1\cdot\cos x = \cos x$$

これで $(\sin x)' = \cos x$ が示された．同様の推論によって $(\cos x)' = -\sin x$ が成り立つことが分かる

□

$\tan x$ の微分

$y = \tan x$ の導関数は次の式で与えられる．

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

証明

商の微分公式を用いると，

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \square\end{aligned}$$

例題 3.4 (1) $y = 2\sin x\cos x + \tan x$ のとき

$$\begin{aligned}y' &= 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)' + (tanx)'\\ &= 2\cos x\cos x + 2\sin x(-\sin x) + \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= 2\cos 2x + \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

(2) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のとき

$$y' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

3.2.2　対数関数と指数関数の微分

まず，対数関数 $y = \log_a x$ の $x = 1$ における微分係数を求めてみよう．

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h) - \log_a 1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+h)\\ &= \lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}\end{aligned}$$

である．ここで $\log_a x$ が $x > 0$ で連続であることを使えば (2.25) 式より

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \log_a (1+h)^{\frac{1}{h}} \\
&= \log_a \left(\lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right)
\end{aligned}
$$

であるから，$h \to 0$ のときの $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 極限値を調べればよい．h が十分小さいときの $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値は，関数電卓や Excel 等の表計算ソフトで簡単に求められ，その値は

$$
e = 2.71828182845\cdots
$$

であることが知られている．

この e を**自然対数の底**という．e は解析学にとって，最も重要な定数のひとつである．一方 $\log_e e = \log e = 1$ であるから，$x = 1$ における $\log x$ の微分係数は 1 である．

$\log x$ の $x = 1$ における微分係数が 1 のことと，対数関数の性質を用いることにより，任意の点 x における $\log_a x$ の導関数を求めることができる．実際，

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a (1 + \frac{h}{x})
\end{aligned}
$$

であるから，$h/x = k$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ であり

$$
(\log_a x)' = \lim_{k\to 0} \frac{1}{xk} \log_a (1+k) = \frac{1}{x} \lim_{k\to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x} \log_a \left(\lim_{k\to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} \right) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a}.
$$

すなわち，次の公式が証明された．

$$
\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}}
$$

注意 3.4 底の変換公式 $\log_a x = \log_a e \log x = \dfrac{\log x}{\log a}$ を用いれば，両辺を微分して

$$
(\log_a x)' = \frac{(\log x)'}{\log a} = \frac{1/x}{\log a} = \frac{1}{x \log a}
$$

をえる．

指数関数 e^x の導関数は $x = 0$ における微分係数が分かると任意の点 x における微分係数，すなわち e^x の導関数，を求めることができる．このことは，指数関数と対数関数の基本的な関係 ($y = \log x$ のグラフは，$y = e^x$ のグラフを，直線 $y = x$ に関して，対称に折り返したものになっている) から明らかである．すなわち，$y = \log x$ 上の点 $(1, 0)$ での接線を直線 $y = x$ に関して，対称に折り返したものは $y = e^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線で，その傾きは 1 である．実際，指数法則を用いることにより，

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h^t o 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x.
\end{aligned}
$$

このようにして最も簡明な公式

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

がえられた．

すなわち，$y = e^x$ という関数は，微分して導関数をとっても，もとと変わらない形をした関数である．<u>このような性質をもつ関数は，e^x か，あるいは Ce^x という関数しかない．</u>ここで C は定数である．

一般に，任意の正数 $a(\neq 1)$ に対して，$y = \log_a x$ の $x = 1$ における微分係数が $\dfrac{1}{\log a}$ であることに注意すれば，$y = a^x$ の $x = 0$ における微分係数は逆数 $\log a$ となる．この関係式から

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log a}$$

が導かれる．勿論この公式は合成関数の微分公式を用いても求めるられる．

例題 3.5 (1) $y = e^x \log x$ のとき

$$y' = (e^x)' \log x + e^x (\log x)' = e^x \log x + e^x \frac{1}{x}$$

(2) $y = \dfrac{\log x}{\log x + 1}$ のとき

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\log x)'(\log x + 1) - \log x(\log x + 1)'}{(\log x + 1)^2} \\ &= \frac{1/x(\log x + 1) - \log x \cdot (1/x)}{(\log x + 1)^2} \\ &= \frac{1}{x(\log x + 1)^2} \end{aligned}$$

3.3 合成関数の微分法

有理関数以外に，三角関数や，指数関数や対数関数などが微分できるようになると，これらの関数を組み合わせてえられる

$$(a)\ \sin(ax + b), \quad (b)\ e^{-x^2} \sin 2x, \quad (c)\ (\log x)^3 - 6(\log x)^2$$

のような関数を，どのように微分するかが問題となってくる．

(a) は，$u = f(x) = ax + b$ という関数と，$y = g(u) = \sin u$ という関数を合成してできた関数 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である．

(b) において，e^{-x^2} は,，$u = f(x) = -x^2$ という関数と，$y = g(u) = e^u$ という関数を合成してできた関数 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である．また $\sin 2x$ は，$u = f(x) = 2x$ という関数と，$y = g(u) = \sin u$ という関数を合成してできた関数 $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である．$e^{-x^2} \sin 2x$ は，このように合成した 2 つの合成関数の積である．

(c) は，$u = f(x) = \log x$ という関数と，$y = g(u) = u^3 - 6u^2$ という関数を合成してできた関数 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である．

定理 3.3.1
$u = f(x)$ という関数と，$y = g(u)$ という関数が与えられたとき，合成関数

$$y = F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

の微分公式は

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{dg(u)}{du}\frac{df(x)}{dx}}$$

で与えられる．

注意 3.5 この式を

$$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

と記すことも多い．しかし，右辺に現れる 2 つプライム (’) の意味が異なることに注意せよ．1 番目のプライムは u に関する微分を表し，2 番目のプライムは x に関する微分を表している．この微分公式は，合成関数の微分がそれぞれの微分 $g'(u)$ と $f'(x)$ の積 になっていることを示している．

合成関数の微分公式を使いこなせない学生が多くなっている．計算した導関数が $g'(u)$ と $f'(x)$ の積にならないで，$g'(u)$ だけになってしまう間違いが非常に多い．

証明
$z = g(f(x))$ の微分については定義より

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

を調べればよい．

一方，仮定より $g(u)$ は微分可能なので

$$g'(u) = \lim_{k \to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{k}$$

が存在する．ここで

$$\frac{g(u+k) - g(u)}{k} = g'(u) + \epsilon(k) \quad (\text{ただし} \lim_{k \to 0} \epsilon(k) = 0)$$

とおくと

$$g(u+k) - g(u) = k\{g'(u) + \epsilon(k)\}$$

とかける．この式は $k = 0$ のときでも成立するので，k はどんな値でよいことになる．そこで $k = f(x+h) - f(x)$ とおくと $f(x+h) = f(x) + k, u = f(x)$ なので

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(u+k) - g(u)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{k\{g'(u) + \epsilon(k)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\{g'(u) + \epsilon(k)\}
\end{aligned}$$

仮定より $f(x)$ は微分可能なので定理 3.1.1 より連続である．ゆえに $h \to 0$ のとき $k = f(x+h) - f(x) \to 0$. したがって極限値は存在して

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\{g'(u) + 0\} = f'(x)g'(u).$$

例題 3.6 合成関数の微分公式を使って次の関数を微分せよ．

$$(1); y = \sin(ax+b) \quad (2)\ e^{-x^2}\sin 2x \quad (3)\ (\log x)^3 - 6(\log x)^2$$

解　(1); $y' = g'(u)f'(x)$ の公式を使って解いてみる．$u = ax+b$ とおくと $y = g(u) = \sin u$ なので

$$\begin{aligned} y' &= (\sin u)'(ax+b)' \\ &= (\cos u)a \end{aligned}$$

u をもとに戻し，a を最初に持ってくると $y' = a\cos(ax+b)$
(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dy}$ の公式を使ってみる．$u = -x^2$ とおくと $y = e^u$．$y = e^u$ を u で微分．$\dfrac{dy}{du} = \dfrac{de^u}{du} = e^u$．
$u = -x^2$ を x で微分．$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}(-x^2) = -2x$．ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (e^u)(-2x)$$

u をもとにもどすと $(e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-2x) = (-2x)e^{-x^2}$．(1) と同様にして $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$．さらに積の微分公式を使って

$$\begin{aligned} (e^{-x^2}\sin 2x)' &= (e^{-x^2})'\sin 2x + e^{-x^2}(\sin 2x)' \\ &= (-2x)e^{-x^2}\sin 2x + e^{-x^2}2\cos 2x \\ &= (-2x)e^{-x^2}\sin 2x + 2e^{-x^2}\cos 2x \\ &= 2e^{-x^2}(-x\sin 2x + \cos 2x) \end{aligned}$$

(3) $u = \log x$ とおくと $y = u^3 - 6u^3$ なので

$$\begin{aligned} y' &= (u^3 - 6u^2)'(\log x)' \\ &= (3u^2 - 12u)\frac{1}{x} \end{aligned}$$

u をもとにもどすと $y' = (3(\log x)^2 - 12(\log x))\dfrac{1}{x} = 3\dfrac{(\log x)^2 - 4\log x}{x}$

対数関数を利用した微分法 (対数微分法)

合成関数の微分公式の応用として，”対数をとって微分する”という対数微分法について学ぶ．この方法により次の公式が導ける．

$$\boxed{(1)\ (x^a)' = ax^{a-1} \quad (a \in \mathbf{R}\ \text{は定数}) \quad (2)\ (a^x)' = a^x\log a \quad (a \in \mathbf{R}\ \text{は定数})}$$

証明

それぞれ，対数微分法で示す．(1) $y = x^a$ とおいて両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^a$$
$$\log y = a \log x$$

この両辺を x で微分する．左辺を合成関数の微分法を使って変形すると，左辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log y &= \frac{d}{dy}(\log y)\frac{dy}{dx}\\ &= \frac{1}{y}y'\end{aligned}$$

一方，右辺は

$$\frac{d}{dx}a\log x = a\frac{d}{dx}\log x = a\frac{1}{x}$$

したがって，$\frac{1}{y}y' = a\frac{1}{x}$．ゆえに $y' = ya\frac{1}{x} = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1}$.

(2) (1) とまったく同様に，$y = a^x$ とおいて両辺の対数をとり，x で微分することによりもとまる．

一般に，関数 $y = f(x)^{g(x)}$ の導関数を求めるには，両辺の対数をとって微分する．これを**対数微分法**という．□

例題 3.7 $y = x^{\frac{1}{x}}$ の導関数を求めてみよう．両辺の対数をとって，$\log y = \log x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log x$．この両辺を x で微分する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log y &= (\frac{1}{x})'\log x + \frac{1}{x}(\log x)'\\ \frac{1}{y}y' &= -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

ゆえに，$y' = -x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\left(-\log x + 1\right)$.

3.4　逆関数の微分法

ここでは，合成関数の微分法の応用として，逆関数の導関数を求める．

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad y = f(x)$$

の両辺を x で微分して

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(y) = \frac{d}{dy}f^{-1}(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$dy/dx = f'(x)$ であるから，

$$\boxed{\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}} \tag{3.8}$$

ここで，y をあらためて x と書き直すと

$$\boxed{\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(f^{-1}(x))}{dx}}} \tag{3.9}$$

例題 3.8 関数 $y = x^n$ は n が偶数のときには $x > 0$ で逆関数が存在する．n が奇数のときは，すべての実数 x で逆関数が存在する．$f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}, f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. したがって

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

$\sqrt[n]{x}$ を指数を用いて $x^{\frac{1}{n}}$ と表すと，この結果は

$$\boxed{(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)} \tag{3.10}$$

と表される．

例題 3.9 関数 $y = f(x) = e^x$ は，すべての実数の作る範囲で逆関数 $f^{-1}(x) = \log x$ をもつ．$y = e^x$ の微分公式を用いて $y = \log x$ の微分公式を求めよ．$f(x) = e^x, f^{-1}(x) = \log x$. したがって

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

3.5 高次導関数，n 次導関数

$y = f(x)$ が微分可能なとき，その導関数 $f'(x)$ が求められた．$f'(x)$ がさらに微分可能であればその導関数 $\{f'(x)\}'$ を求めることができる．これを $f(x)$ の 2 次導関数といい

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

などの記号で表す.

$f(x)$ の第 2 次導関数が微分可能であるとき，$f''(x)$ の導関数を $f''(x)$ の第 3 次導関数という．$y = f(x)$ の第 3 次導関数を

$$y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

などの記号で表す.

例題 3.10 次の関数の 1 次から 3 次までの導関数を求めよ．

$$(1)\ y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad (2)\ y = \frac{1}{x} \quad (3)\ y = \sin x$$

解 順に微分して求めればよい．

$$(1)\ y' = (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)' = 3x^2 + 4x - 3$$

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x - 3)' = 6x + 4$$

$$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$$

(2) $y' = (x^{-1})' = -1x^{-2} - x^{-2}$

$$y'' = (y')' = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$$

$$y''' = (y'')' = (2x^{-2})' = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4}$$

(3) $y' = (\sin x)' = \cos x$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x$$

一般に，関数 $y = f(x)$ の $(n-1)$ 次導関数 $f^{(n-1)}$ がさらに微分可能なとき $\{f^{(n-1)}(x)\}'$ を $f(x)$ の n 次導関数といい $f^{(n)}(x)$ で表す．また

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

などの記号で表す.

注意 3.6 関数 $y = f(x)$ の $\underline{n\text{ 次導関数を }y^n\text{ または }f^n\text{ で表すことはない}}$．$f^n$ は f の n 乗，または $f \circ f \circ \cdots \circ f$ と f を n 回合成して作られる関数を表す場合が多い．一般に文脈に依存して意味が変わるが n 次導関数として使われることはないので注意しよう.

例 3.1 ここでは代表的な初等関数 $\sin x, \cos x$ について，その n 次導関数を求める．このためには加法定理を使うと

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \quad \sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$$

となることが示せる．すなわち cos がでたら sin に，sin がでたら cos に直せばよい.

(1) $y = \sin x$

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} y'' &= \{\sin(x + \frac{\pi}{2})\}' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin\{(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\} \\ &= \sin(x + 2 \times \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

このように微分するごとに括弧の中の $\frac{\pi}{2}$ が 1 つずつ増えていくので

$$\boxed{y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)}$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
(2)\ y' &= (\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\
y'' &= \{\cos(x + \frac{\pi}{2})\}' = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' \\
&= \quad -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos\{(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\} \\
&= \quad \cos(x + 2 \times \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\boxed{y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)}
$$

例 3.2 関数 $y = e^x, \log x$ について n 次導関数を求めてみる．

$$
\begin{aligned}
(1)\ y' &= (e^x)' = e^x \\
y'' &= (y')' = (e^x)' = e\ x \\
y''' &= (y'')' = (e^x)' = e^x
\end{aligned}
$$

いくら微分しても変わらないので

$$
y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x
$$

$y = \log x$ については

$$
\begin{aligned}
(2)\ y' &= (\log x)' = \frac{1}{x} = x^{-1} \\
y'' &= (y')' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} \\
y''' &= (y'')' = (-x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3} \\
y^{(4)} &= (y''')' = \{(-1)(-2)x^{-3}\}' = (-1)(-2)(-3)x^{-4}
\end{aligned}
$$

このように n 次導関数の規則性を見つけるには，微分して出てくる係数をやたらに計算せずそのまま残すことが大切である．出てくる係数の規則性より

$$
y^{(n)} = (\log x)^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)x^{-n}
$$

これを整理すると

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)x^{-n} \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \quad (\text{ただし } n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

第4章　面積・体積と定積分

4.1　面積

面積や体積を求めるという問題は，古代ギリシャの時代から人々の好奇心を刺激し続けてきた．Archimedes(紀元前 282~212) の偉大な業績の中に球の面積及び体積，放物線と円の面積の計算がある． 17 世紀の始めには整数だけでなく任意の a の値に対して，曲線 $y = x^a$ の下方の領域の面積が計算された (Cavalieri, Roberval, Fermat(1636))． 積分法というのは，実際，微分法よりずっと古いものである．しかし，決定的な飛躍がなされたのは，Newton, Leibniz, Johann Bernoulli が独立に，積分が微分の**逆演算**であり，過去の研究者たちのあらゆる努力が数個の微分の規則に帰着してしまうことことを発見したときであった． 積分記号は Leibniz が作り,「積分」という用語は Johann Bernoulli が作り，兄の Jakob Bernoulli が出版物 (1690) で公表した．

全体の量を測るのにその量の小部分をいくつか加え合わせて近似する仕方はさまざまな形があるのに，それらがみな，**積分法** (integral calculus) というたった一つの手順にまとめることができるというのは驚くべきことである．面積，体積，長さ，圧力，慣性モーメント，重さなどはみなそのような和によって扱うことができる．

区間 $a \le x \le b$ において，$f(x) \ge 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$，x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

である．この面積は，普通図 4.1 のように，幅 dx をもつ縦長の細い長方形の短冊の束に分けられる． このような短冊の面積は，底辺 dx と高さ $f(x)$ の積として $f(x)dx$ とかくことができる．そしてそれら全部の和が定積分

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

である．

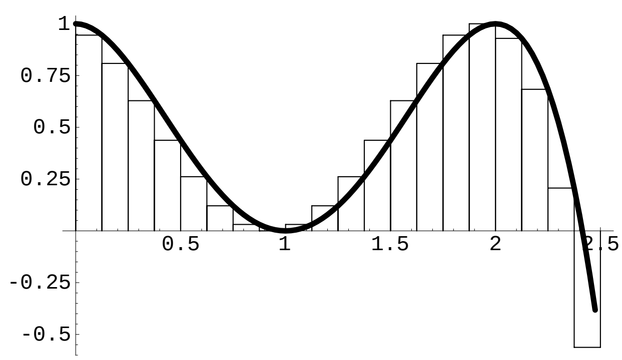

図 4.1: Riemann 積分

これは，求める面積を有限の幅の微小長方形の面積の有限和で近似するのだという風に考えればよい．このためには $x = a$ から $x = b$ までの区間を n 個の微小区間に分割してその分点を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ とする．微小長方形の面積の有限和は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

であるから，ここで，n を限りなく大きくすると，区間の分割は限りなく細かくなり，S_n はこの図形の面積 S に限りなく近づいていくことが予想される．実際，次の定理がある．

定理 4.1.1
関数 $y = f(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ で <u>連続</u> であれば

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{4.1}$$

がなりたつ．

また，2 つ関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ において，$f(x) \leq g(x)$ であるとき，2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

である．

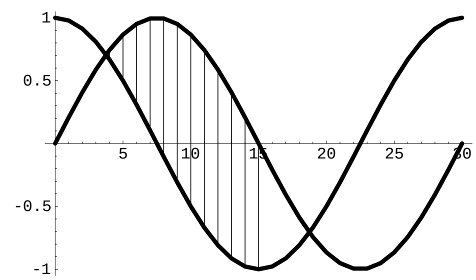

図 4.2: $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積

補足

$y = f(x)$ のグラフが区間 $[a, b]$ 上で作る図形はすべて面積をもっているのであろうか．「数学 III」で取り扱った関数は，それほど複雑でないので，そのグラフの作る図形はすべて面積をもっている．しかし，グラフが面積をもたない関数の例は簡単に作れる．そのような関数の例を 2 つ与えておく．

$$(1)\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ が無理数} \\ 0, & x \text{ が有理数} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$(2)\ f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{4.3}$$

2 つのグラフは不連続点を持っている．特に (1) のグラフは，無限に 0 と 1 とを往復し x が有理数ならば x で不連続である．この関数は Dirichlet 関数と呼ばれている．(2) のグラフは図 2.21 のように $x = 0$ の近くで無限に振動し，原点で不連続である．この 2 つ関数が区間 $[-1, 1]$ 上で作る図形は面積をもたない．言い換えると，定積分

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

は存在しない．

関数 $y = f(x)$ が与えられたとき，x 軸とこの関数のグラフの間の図形の面積を計算したい．点 a を固定して a と $a < x$ となる x を任意に選んだとき，$y = f(x)$ のグラフが区間 $[a, x]$ 上で作る図形の面積を $F(x)$ と表すことにする． すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4.4}$$

とおくことにより，新しい関数 $F(x)$ がえられる．$x = a$ のとき図形の面積は 0 だから $F(a) = 0$ である．そのとき決定的なことは

関数 $f(x)$ は $F(x)$ の導関数である．すなわち，$F'(x) = f(x)$ がなりたつ．

という事実です．このとき $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (primitive function) または**不定積分** (indefinite integral) という[1]．原始関数は 1 つでない．任意の定数 C を加えても $(F(x) + C)' = f(x)$ だから $F(x) + C$ も同じ関数の原始関数となる．いま，$C = -F(a)$ とすれば，その原始関数 $F(x) - F(a)$ は $x = a$ で 0 となり，$y = f(x)$ のグラフが区間 $[a, b]$ 上で作る図形の面積は

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)} \tag{4.5}$$

と表される. (4.5) の右辺を $F(x)|_a^b$ または $[F(x)]_a^b$ と表すこともある.

例題 4.1 2 曲線 $y = \sin x, y = \cos x$ および 2 直線 $x = 0, x = 5\pi/4$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

$\sin x = \cos x$ から $\tan x = 1 \quad 0 \le x \le 5\pi/4$ において，この方程式を解くと，交点の x 座標は $x = \pi/4, 5\pi/4$ である．したがって，図 4.3 の縦線部分が求める面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx \\ &= [\sin x - (-\cos x)]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{4}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$S = \int_0^{5\pi/4} |\sin x - \cos x|\,dx$$

であることに注意しよう.

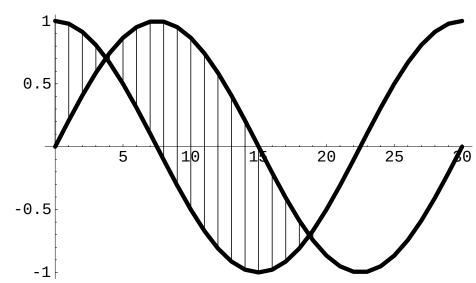

図 4.3:

ここで定積分の定義においては関数 $y = f(x)$ を区間 $[a, b]$ 上で考えたので $a < b$ であった．この制約をはずすために次のように 定義を追加しておく.

[1] $\int_a^x f(t)dt$ という x の関数を一般に $\int f(x)dx$ と記し，不定積分という．関数 $f(x)$ が 連続 であるとき $f(x)$ の不定積分と原始関数は一致する．しかし，それ以外のときは不定積分と原始関数は独立な概念である.

定義 4.1

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

さらに，定義により次の定積分の性質も導ける．これら定積分の性質は面積の基本的性質から導びけることに注意しよう．

定理 4.1.2

$$(1) \int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad (c \text{ は定数})$$

$$(2) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad (\text{復号同順})$$

(1),(2) を**積分の線形性**という．

$$(3) \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(3) を**積分区間に関する加法**という．

$$(4)[a,b] \text{ 上において } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(4) を**積分の単調性**という．

$a < b$ とし，いたるところ $f(x) \geq 0$ とする．さらに f は連続とする． このとき f が 恒等的に 0 でなければ

$$(5) \int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

(5) を**積分の正値性あるいは強単調性**という．

$$(6) \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a < b)$$

証明

公式 (2) は，(4.1) 式を用いて

$$\begin{aligned}
\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k) \pm g(x_k)\}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\quad \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つからである．

厳密にいうと，$\sum$ を分けて lim をとってもよいことなどを，暗黙のうちに使っている．このようなことが許されることは，実は証明することができる．その他の公式も直観的には理解しやすいが，厳密に証明しようとするといろいろと面倒くさい問題点を持っている．□

定理 4.1.3 (積分の平均値の定理)

関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で連続ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a) \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する．

$f(x) \geq 0$ の場合を考えよう．$\int_a^b f(x)\,dx$ は左図の影の部分の面積を表している．この面積に等しい面積をもつ長方形を区間 $[a, b]$ 上につくることができるというのがこの定理の意味である．

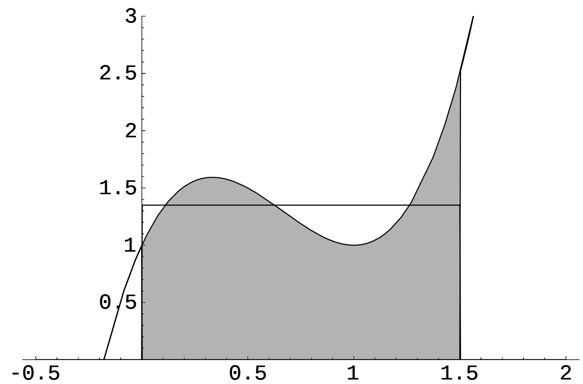

図 4.4:

証明

この定理は Weierstrass の最大値の定理と中間値の定理 (定理 2.4.4) を使って示すことができる．最大値の定理は, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ が 連続関数 なら，$[a, b]$ 上で有界で，最大値と最小値をとることを述べている．すなわち，$u \in [a, b]$ と $U \in [a, b]$ が存在して

$$f(u) \leq f(x) \leq f(U) \quad x \in [a, b]$$

である．m と M を $[a, b]$ 上の $f(x)$ の最小値と最大値であるとすると，すべての $x \in [a, b]$ に対して $m \leq f(x) \leq M$ となる．積分の単調性 (定理 4.1.2 の (3)) を使って

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

あるいは

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

が成り立つ．

この不等式は，グラフの上からはほとんど明らかであろう (図 4.5 参照)．$b - a$ で割れば

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

したがって，$\int_a^b f(x)\,dx/(b - a)$ の値は $m = f(u)$ と $M = f(U)$ の間にあるので，中間値の定理によって，この値が $f(c)$ に等しいような $c \in [a, b]$ が少なくとも一つあることが導かれる．□

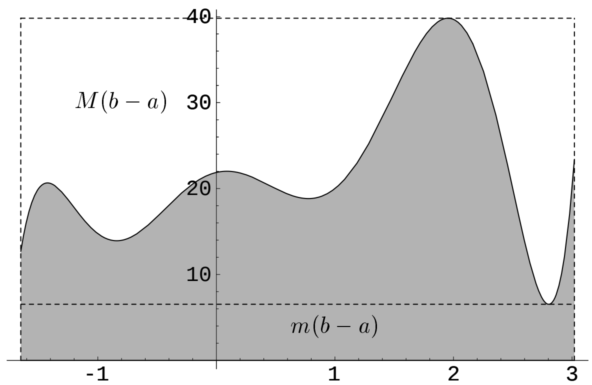

図 4.5:

4.1.1 定積分で表される関数の微分

連続関数 $y = f(x)$ が与えられたとき，a を 1 つとめて

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \tag{4.6}$$

とおくことにより，新しい関数 $F(x)$ が得られる．積分の単調性 (定理 4.1.2 の (3)) から，$f(x) > 0$ ならば，x が a から出発して大きくなるとき，$F(x)$ の値は x とともに増加する．他方，$x < a$ ならば，定義 4.1 から，$F(x) < 0$ となっていることに注意しよう．

(4.6) 式によって定義された関数 $F(x)$ を微分してみよう．微分の定義より

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx \end{aligned}$$

平均値の定理を使うと $x < c < x+h$ または $x+h < c < h$ なる c に対して

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot f(c)\cdot(x+h-x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot f(c)h \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \end{aligned}$$

$h \to 0$ のとき $c \to x$ であり，$f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから

$$= \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

結局

$$\boxed{F'(x) = \left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}' = f(x)} \tag{4.7}$$

が示された．

そこで，次のように定義する．

定義 4.2 関数 $f(x)$ に対して

$$G'(x) = f(x)$$

となる関数 $G(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (primitive function) という．

(4.6) 式によって定義された関数 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．あるいは関数 (4.6) を微分するともとの関数に戻る．

4.2 定積分と不定積分

$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を任意に 1 つ取る．(4.7) 式により，$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ も $f(x)$ の 1 つの原始関数となっている．このとき $F(x)$ と $G(x)$ の違いは定数 C だけであることが証明できる[2]．すなわち

$$F(x) = G(x) + C$$

となるある定数 C が存在する．ゆえに

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a) \\
&= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b} \tag{4.8}$$

したがって，不定積分と定積分をつなげる次の定理を得た．

定理 4.2.1 (微分積分学の基本定理)
関数 $y = f(x)$ が $[a, b]$ 上で連続とする．

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \leq x \leq b)$$

とくと，次のこと成り立つ．

1. $G(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つである．

2. $F(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

が成立する．

[2] Lagrange の平均値の定理を使って示すことができる．

4.2.1　初等関数の不定積分

初等関数の微分の公式よりすぐに次の不定積分の公式が導ける．

$$(1)\ \int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a: 定数, a \neq -1)$$
$$(2)\ \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$
$$(3)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$(4)\ \int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$(5)\ \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$
$$(6)\ \int e^x\,dx = e^x + C$$
$$(7)\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(1)(\frac{1}{a+1}x^{a+1})' = x^a \quad (a: 定数, a \neq -1)$$
$$(2a)(\log|x|) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$
$$(2b)(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$
$$(3)(\cos x)' = -\sin x$$
$$(4)(\sin x)' = \cos x$$
$$(5)(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(6)(e^x)' = e^x$$
$$(7)(\frac{a^x}{\log a})' = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

例 4.1

$$\int_1^2 (5x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2\right]_0^1 = (\frac{5}{3}\cdot 2^3 - 2^2) - (\frac{5}{3} - 1) = \frac{26}{3}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$
$$\int_1^e \frac{2-x^2}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2}{x}\,dx - \int_1^e \frac{x^2}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2}{x}\,dx - \int_1^e x\,dx = \left[2\log x - \frac{x^2}{2}\right]_1^e$$
$$= (2\log e - \frac{e^2}{2}) - (2\log 1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(5 - e^2)$$
$$\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2})$$
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \int_0^1 \left\{\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right\}'\,dx = \left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{9}(2^{3/2} - 1)$$

微分積分学の基本定理を用いて積分値を計算するときの手がかりは，被積分関数 f を導関数にもつ関数 F を見つけることにある．それはたくさんの関数を実際に微分した経験から生まれるものであるが，2,3 の積分法の公式を用いると，ある程度は系統的に行うことができる．それを次節で練習しよう．

4.3　積分法の公式とその使い方

3.1.2 節には微分法の公式が与えられている．その公式は 2 つの関数の和 $f+g$，積 fg，商 f/g の導関数がそれぞれの関数の導関数 f', g' により，どのように表されるかを与えている．微分積分学の基本定理を用いて，これらの公式を，積分法に関する公式へ書き直そう．f, g をそれぞれ F, G の導関数とする．和の公式は，

$$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$$

である．微分積分学の基本定理を関数 $f+g$ へ適用すると，

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = [F(x)+G(x)]_a^b$$

他方，

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \qquad \int_a^b g(x)\,dx = [G(x)]_a^b$$

であるから，はじめのものとこれら 2 つの和を比較して，積分に関する**和の公式**

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx} \tag{4.9}$$

が導ける．この公式は別に新しくない．すでに定理 4.1.2 の (2) において，積分の線形性とよばれ，近似和の線形性を用いて導かれた．

つぎに，微分法に関する積の公式:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を思い出そう．両辺を区間 $[a,b]$ で積分し，微分積分学の基本定理を左辺に適用すれば，

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))\,dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

左辺の積分の線形性と項の入れ換えにより，つぎの**部分積分法** (Integration by parts) の公式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \end{aligned} \tag{4.10}$$

部分積分法は<u>左辺の積分より右辺の積分のほうがよくわかっている</u>場合に役に立つ．ここでよくわかっているという意味は，右辺の積分の値が既知であること，あるいは，左辺の積分より右辺の積分が取り扱いやすい，より複雑でないということである．

例題 4.2 定積分 $\int_1^e x\log x\,dx$ の値を求めよ．

解　<u>与えられた被積分関数を $f'(x)g(x)$ に分解する</u>．分解する方法はいろいろあるので，ここでの選び方は，経験の少ない読者には曖昧に思われるかもしれないが，ある分解が他のものより扱いやすい理由はすぐにわかるようになる．最初は無駄に思われるかもしれないが，いろいろな分解を試してみるのが部分積分法を理解する王道である．

(1)$x\log x = (1/2x^2)'\log x$ と分解してみる．

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log x dx &= \int_1^e (\frac{1}{2}x^2)'\log x dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2(\log x)' dx\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e xdx\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{1}{4}(1+e^2)\end{aligned}$$

(2)$(x(\log x - 1))' = \log x$ に注意して，$x\log x = (x(\log x-1))'x$ と分解してみる．

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log x dx &= \int_1^e (x(\log x-1))'xdx = [x(\log x-1)x]_1^e - \int_1^e x(\log x-1)x'dx\\ &= 1 - \int_1^e x(\log x-1)dx = 1 - \int_1^e x\log x dx + \int_1^e xdx\end{aligned}$$

右辺に積分 $\int_1^e x\log x dx$ が現れたので左辺に移項すると，

$$2\int_1^e x\log x dx = 1 + \int_1^e xdx = 1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

両辺を 2 で割って

$$\int_1^e x\log x dx = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

例題 4.3 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ の値を求めよ．

解

(1)$x\cos x = x(\sin x)'$ と分解してみる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx\\ &= [x(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x'\sin x dx\\ &= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx\\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos\frac{\pi}{2} + 1]\\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

(2)$x\cos x = (\frac{1}{2}x^2)'\cos x$ と分解してみる．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}x^2)'\cos x dx \\
&= \left[(\frac{1}{2}x^2)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2(\cos x)' dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2(\cos x)' dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2 \sin x dx
\end{aligned}
$$

この分解では，左辺の積分より右辺の積分が取り扱いにくくなっている．そこで最初に戻り，全く別の関数で新らしい分解を作って，部分積分法を適用しなおさなければならない．

例題 4.4 定積分 $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$ の値を求めよ．

解

$x^3\sqrt{1+x^2} = (x\sqrt{1+x^2})x^2 = (\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2})'x^2$ と分解してみる．部分積分法により，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx &= \int_0^1 (\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2})'x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}x^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}(x^2)' dx \\
&= \frac{1}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+x^2)^{3/2} x dx \\
&= \frac{1}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\int_0^1 \left\{\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2}\right\}' dx \\
&= \frac{1}{3}2^{3/2} - \frac{2}{15}(2^{5/2}-1)
\end{aligned}
$$

この例題は部分積分法をどうやって使ったら良いかを説明している．被積分関数を $f'(x)g(x)$ と因数分解するとき，次のいずれかの道を選ばなければならない．

1. 因数 $f'(x), g(x)$ の選び方がよければ，部分積分後に得られる被積分関数 $f(x)g'(x)$ が，ある関数の導関数となる．

2. 部分積分後に得られる被積分関数 $f(x)g'(x)$ を導関数にもつ簡単な関数を見つけることができない．しかし，右辺に現れる積分の方が左辺に現れる積分よりも扱いやすいとき，左辺の積分に再び部分積分法を適用する．

3. 部分積分法の適用をあきらめる．

部分積分法の重要性は，都合のいい f, g を選べる場合に限定されるわけではない．以下の例は，部分積分法に新しい見方を与える．

例 4.2 定積分 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ の値を求めてみる．

被積分関数を $x^2\sqrt{1-x^2} = (x\sqrt{1-x^2})x = \left\{-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right\}' x$ と分解する．

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \left[(\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2})x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}dx$$

これまでの例と違い，いまの我々の知識では，右辺の積分を解析的に計算できない．そこで積分値を近似的に計算してみよう．右辺の積分の方が左辺の積分より近似し易い．

$y = x^2\sqrt{1-x^2}$ の導関数は

$$y' = 2x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

であり，$x \to 1$ のとき，$-\infty$ へ発散する．これは，この関数のグラフが $x = 1$ において，x 軸に垂直な接線を持つということである．これと対照的に，$y = 1/3(1-x^2)^{3/2}$ の導関数は $-x\sqrt{1-x^2}$ であり，全区間 $[0,1]$ において変化が穏やかで，有界である. このような導関数を持つ関数はゆっくりと変化している．次のことが知られている．

> ゆっくり変化する関数の積分を近似的に求めることは急激に変化するものの積分値を求めることよりも易しい

数値計算を実際に Microsoft Excel を使って実験し，このことを納得して欲しい．

最後に，積分の重要な公式を合成関数の微分公式 (chain rule) から導く．$F(x), g(t)$ を微分可能な関数とする．$(F \circ g)(t)$ を合成関数とする． $F(x)$ の導関数を $f(x)$ で表す．すなわち $F'(x) = f(x)$

いま，$x = g(t)$ において，$g(t)$ が区間 $\alpha \leq t \leq \beta$ で 1 対 1 の関数であり

$$t = \alpha \quad \text{のとき} \quad x = a$$
$$t = \beta \quad \text{のとき} \quad x = b$$

とすると

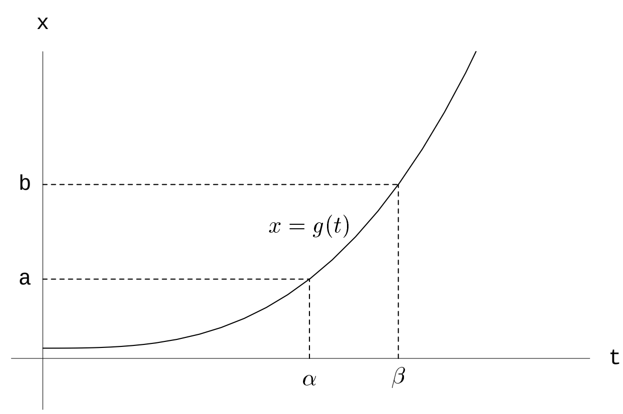

図 4.6:

合成関数の微分公式から

$$(F \circ g)'(t) = (F' \circ g)(t)g'(t) = (f \circ g)(t)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

両辺を変数 t について区間 $[\alpha, \beta]$ で積分し，微分積分学の基本定理を左辺に適用すれば

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g)(t)g'(t)dt = [(F \circ g)(t)]_\alpha^\beta$$

一方

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = [F(x)]_a^b = [(F \circ g)(t)]_\alpha^\beta$$

したがって，2 つの式の右辺は等しいので左辺も等しく

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (f \circ g)(t)g'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$$

この公式は**置換積分の公式** (Integration by substitution)，あるいは**積分における変数変換の公式**と呼ばれる．

例題 4.5 定積分 $\int_{1/2}^1 x\sqrt{2x-1}dx$ を求めよ．

解　$\sqrt{2x-1} = t$, すなわち，$x = \dfrac{t^2+1}{2}$ とおいて両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = t \quad \text{ゆえに} \quad dx = tdt \qquad \text{また} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 1/2 & \to & 1 \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 x\sqrt{2x-1}dx &= \int_0^1 \frac{t^2+1}{2} \cdot t \cdot tdt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (t^4+t^2)dt = \left[\frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

例題 4.6 定積分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ を $x = \sin\theta$ と三角関数へ置き換えて求めよ．
解　$x = \sin\theta$ の両辺を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad dx = \cos\theta d\theta \qquad \text{また} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \pi/2 \end{array}$$

また，区間 $[0, \pi/2]$ で $\cos\theta \geq 0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$$

ゆえに，求める値は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

例題 4.7 定積分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$ を求めよ．

解　$x = \tan\theta$ とおいて両辺を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \qquad \text{また} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \sqrt{3} \\ \hline \theta & 0 & \to & \pi/3 \end{array}$$

また，$\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\pi/3} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta = [\theta]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

4.3.1　偶関数と奇関数の定積分

$f(x) = x^2, f(x) = \cos x$ などのように，$f(-x) = f(x)$ となる関数を**偶関数** (even function) という．

また，$f(x) = x, f(x) = \sin x$ などのように，$f(-x) = -f(x)$ となる関数を**奇関数** (odd function) という．

ところで積分区間に関する加法性から

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

である．

ここで，$\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において，$x = -t$ とおいて両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad dx = -dt \quad \text{また} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -a & \to & 0 \\ \hline t & a & \to & 0 \end{array}$$

だから

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_a^0 f(-t)\cdot(-1)dt = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt$$

$f(x)$ が偶関数であるときには，$f(-t) = f(t)$ であるから

$$\int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

また，$f(x)$ が奇関数であるときには，$f(-t) = -f(t)$ であるから

$$\int_0^a f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$$

よって，偶関数，奇関数の定積分については，次のことが成り立つ．

(1) $f(x)$ が偶関数ならば　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$ が奇関数ならば　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

例 4.3 (1) $\int_{-1}^{1}\left(2x^4 - \frac{1}{2}x^3\right)dx$ の値を求めよ．

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(2x^4 - \frac{1}{2}x^3\right)dx &= 2\int_{-1}^{1} x^4 dx - \int_{-1}^{1} x^3 dx \\ &= 4\int_{0}^{1} x^4 dx - 0 \\ &= 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax - x^2}dx$ の値を求めよ．

$\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$, $x - a = a\sin\theta$ とおいて両辺を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta \quad ゆえに \quad dx = a\cos\theta d\theta \qquad また \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2a \\ \hline \theta & -\pi/2 & \to & \pi/2 \end{array}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax - x^2}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(1+\sin\theta)a\cos\theta\cdot a\cos\theta d\theta \\ &= a^4\left\{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\right\}\end{aligned}$$

第 1,3 項は偶関数，第 2 項は奇関数だから

$$\begin{aligned}&= 2a^4\left\{\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta + \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\right\} \\ &= 2a^4\left\{\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta + \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta d\theta\right\} \\ &= 2a^4\left\{\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta\right\} \\ &= 2a^4\left\{\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}\right\} \\ &= 2a^4\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16}\right\} \\ &= \frac{5}{8}\pi a^4\end{aligned}$$

4.4　いろいろな図形の面積

サイクロイド曲線は θ を**媒介変数，パラメータ** (parameter) として

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で表される曲線である．ただし，$a > 0$ である．

例題 4.8 サイクロイドの，$0 \le \theta \le 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解　サイクロイド曲線は図 4.7 のような曲線になり，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx$$

である．ここで $x = a(\theta - \sin\theta)$ であるから両辺を θ で微分すると

$$y = a(1 - \cos\theta), \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta) \quad \text{ゆえに} \quad dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$$

また

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \to & 2\pi \\ \hline x & 0 & \to & 2\pi a \end{array}$$

　だから，置換積分法を用いて

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\imath} a(1 - \cos\theta) \cdot a(1 - \cos\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos\theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= a^2 \left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

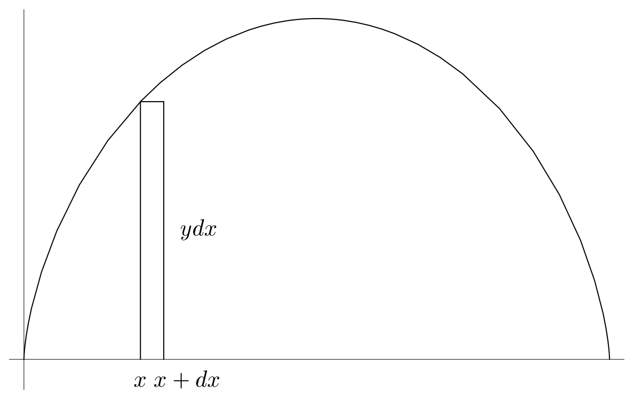

図 4.7: サイクロイド曲線

　x, y に関する方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表される曲線を**楕円** (ellipse) という．ただし，$a > 0, b > 0$ である．この楕円は，円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸を基準にして，y 軸方向に b/a 倍してできる図形である．

　この曲線はパラメータ θ を用いて次のように表される．

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \end{cases}$$

例題 4.9 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ．

解　$x = a\cos\theta$ であるから両辺を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad dx = -a\sin\theta d\theta \quad \text{また} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline \theta & \pi/2 & \to & 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a y dx \\
&= 4\int_{\pi/2}^0 y\frac{dx}{d\theta}d\theta \\
&= 4\int_{\pi/2}^0 b\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= 2ab\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab
\end{aligned}
$$

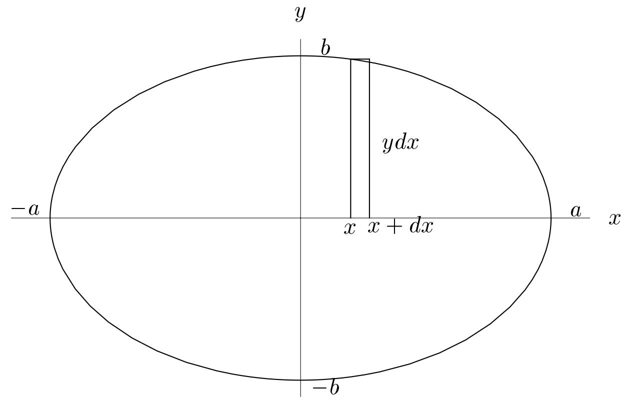

図 4.8: 楕円

4.5　回転体の体積

$y = f(x)$ のグラフが区間 $[a, b]$ 上で作る図形の面積は

$$\int_a^b f(x)dx$$

と表される．一方図形の体積は 2 変数の連続関数に対して，**重積分** (double integral) とも呼ばれる 2 変数関数としての定積分

$$\iint_D f(x, y)dxdy \quad (\text{積分範囲 } D \text{ は平面上の有界領域})$$

で表される．しかし，ここでは 1 変数の関数のみ扱っているので，1 変数の連続関数の定積分で表される 回転体の体積を求める公式 を作ろう．

関数 $y = f(x)$ は，区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ を満たすとする．いまこのグラフを，x 軸を軸として，空間の中で 1 回転すると，回転体が得られる．回転体の 2 つ底面は円であって，両端の線分 $x = a, 0 \leq y \leq f(a)$ と，$x = b, 0 \leq y \leq f(b)$ を回転したものとなっている．

区間 $[a, b]$ を n 等分して，その分点の座標を

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b$$

とする．ここで

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

である．

W の体積は

$$\sum_{k=1}^{k=n}\varDelta V_k = \pi\sum_{k=1}^{k=n}\{f(x_k)\}^2\frac{b-a}{n}$$

である．

n を大きくして，分点の個数を増やしていくと，W はしだいに回転体に近づく．したがって

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\varDelta V_k = \pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\{f(x_k)\}^2\frac{b-a}{n}$$

図 4.9 のように，x_{k-1}, x_k の間にある回転体の部分を薄い円盤 W_k で置き換える．W_k は厚さ $(b-a)/n$，底面は半径 $f(x_k)$ の円である．したがって W_k の体積は

$$\Delta V_k = \frac{b-a}{n}\cdot\{f(x_k)\}^2 = \frac{b-a}{n}\cdot\pi\left\{f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\}^2$$

で与えられる．$W_1, W_2, \ldots, W_n$ を集めて作られる図形 W は，円板を横に並べて貼り合わせたような形をしているが，W は回転体を近似する円板状の階段である．

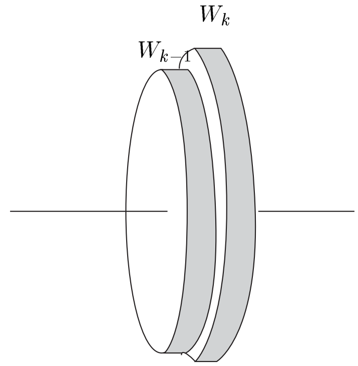

図 4.9:

この右辺を，定理 4.1.1 の (4.1) と比べると，右辺は $\pi\{f(x)\}^2$ という関数の，a から b 間での定積分の値になっていることが分かる．

したがって

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx} \tag{4.11}$$

が証明された．

例題 4.10 $y = x^2$ のグラフの $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ の部分を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積 V_1 と，y 軸の周りに回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

解

$$V_1 = \pi\int_0^{1/2} y^2 dx = \pi\int_0^{1/2} (x^2)^2 dx = \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{1/2} = \pi\frac{1}{20}$$

V_2 を求めるには，y 軸からグラフをながめる必要がある，$y = x^2$，$0 \leq x \leq 1/2$ を x について解くと，$x = \sqrt{y}$，$0 \leq y \leq 1/4$.

$$V_2 = \pi\int_0^{1/4} x^2 dy = \pi\int_0^{1/4} (\sqrt{y})^2 dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1/4} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

例題 4.11 底面の半径が r，高さが h の円錐の体積 V を求めよ．

解　この円錐は，直線 $y = \dfrac{r}{h}x$, x 軸および直線 $y = h$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転して得られる立体と考えられる．したがって，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^h y^2 dx = \pi\int_0^h \left\{\frac{rx}{h}\right\}^2 dx \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

例題 4.12 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき，サイクロイド曲線を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ．

解　サイクロイドは，直線 $y = \pi a$ に関して対称であり，θ が 0 から π まで変化するとき，x は 0 から πa までで変化する．よって，求める体積は

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=2\pi\int_0^{\pi a}y^2dx$$

一方，$x=a(\theta-\sin\theta)$ であるから両辺を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)\quad ゆえに\quad dx=a(1-\cos\theta)d\theta$$

また

θ	$0\ \rightarrow\ \pi$
x	$0\ \rightarrow\ \pi a$

だから，置換積分法を用いて

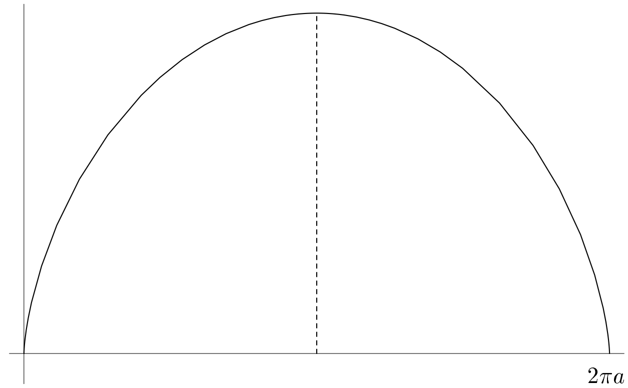

図 4.10: サイクロイド曲線

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{\pi a}y^2dx=2\pi\int_0^{\pi}a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)d\theta\\&=2\pi a^3\int_0^{\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta\end{aligned}$$

ここで，$\int_0^{\pi}d\theta=\pi,\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta=0$

$$\begin{aligned}&=2\pi a^3\left(3\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta-\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta\right)\\&=2\pi a^3\left(3\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}-\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi}\right)\\&=2\pi a^3(\pi-3\cdot 0+3\cdot\frac{\pi}{2}-0)=5\pi^2a^3\end{aligned}$$

4.6　定積分と和の極限

曲線 $y=f(x)=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積 S を，**数列に関する挟み撃ちの原理** (2.3.3 節の定理 2.3.2 を参照) を用いて求めてみよう．

区間 $[0,1]$ を n 等分し，$\varDelta x=1/n$ の大きさの小区間に分割する．

次に，それぞれの小区間を 1 辺とする n 個の長方形を図 4.11 のようにつくり，それらの面積の和を S_n とする．このとき

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{k=n}f(x_{k-1})\varDelta x=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n}(k-1)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{k=n-1}k^2\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であるから

$$=\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

一方，区間 $[0,1]$ を n 等分し，今度は図 4.12 のような長方形の面積の和 T_n を考える．すなわち，

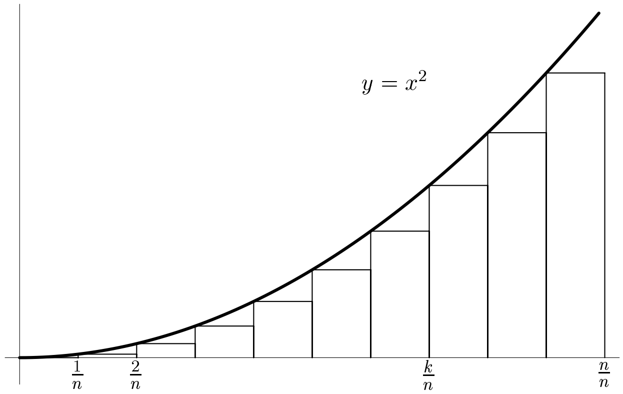

図 4.11: $y = x^2$

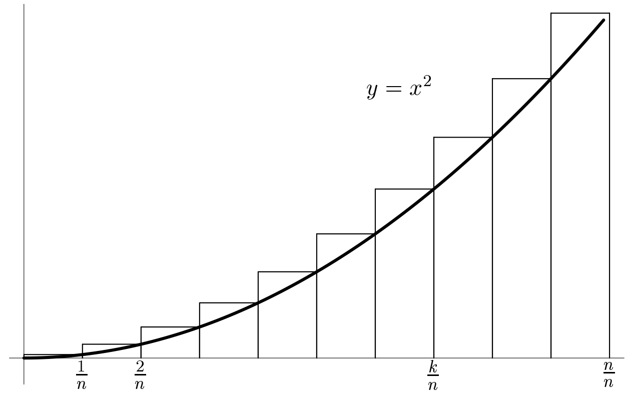

図 4.12: $y = x^2$

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)\varDelta x = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

このとき，面積の性質より

$$S_n < S < T_n$$

が成り立つ．

ここで，n を限りなく大きくすると，区間の分割は限りなく細かくなり，S_n と T_n は図形の面積 S に限りなく近づくことが予想される．実際，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

また，

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

であるから，数列に関する挟み撃ちの原理より

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n \leq S \leq \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}$$

よって，$S = \dfrac{1}{3}$ が成り立つ．もちろん，図形の面積は定積分で表されるので

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

であることはいうまでもない．

このように，区間を分割して，和の極限として面積や体積を求める方法を**区分求積法**という．**区分求積法の考えに基づく積和の極限としての積分**が本来の定義である．このことは強調しておくべきことである．

この事実を次の定理として述べよう．

定理 4.6.1
関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ で 連続 であるとき

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varDelta x = \lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x = \int_a^b f(x)dx} \tag{4.12}$$

ただし，$\varDelta x = (b-a)/n, x_k = a + k\varDelta x\ (k = 1, 2, \dots, n)$

また，一般に，$x_{k-1} \le c_k \le x_k$ となる c_k を任意に選んだとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\varDelta x = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つことが知られている．

例題 4.13 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n})$$

解 定理 4.6.1 を使うために，最初に和の記号 $\sum$ を用いて表そう．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

であるから

$$f(x) = \sqrt{x}, a = 0, b = 1, \varDelta x = 1/n, x_k = k\varDelta x$$

とすれば，求める極限値は

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\varDelta x \\
&= \int_0^1 \sqrt{x}dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

である．

4.7　曲線の長さ

t を媒介変数 (パラメータ) として，点 P の座標 (x, y) が

$$x = f(t), y = g(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表されるとき，t を変化させると，それに対応して点 P は座標平面上で，ある曲線 C を描く．$f(t), g(t)$ が区間 $[a, b]$ でそれぞれ連続な導関数をもつとき，この曲線の長さ L を求めてみよう[3]

区間 $[a, b]$ を n 等分し

$$a = t_0 < t_1 < t_2, \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

とする．曲線上に点 $P_k(f(t_k), g(t_k))$ をとると，線分 $P_{k-1}P_k$ の長さ ΔL_k は

$$\Delta L_k = \sqrt{\{f(t_k) - f(t_{k-1})\}^2 + \{g(t_k) - g(t_{k-1})\}^2} \tag{4.13}$$

である．

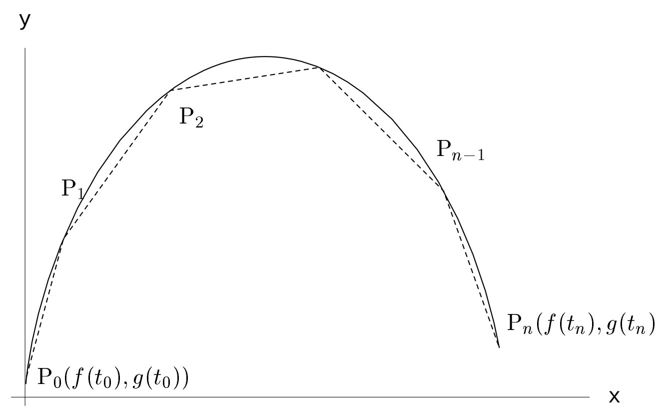

図 4.13:

一方，Lagrange の**平均値の定理**により，$\Delta t = t_k - t_{k-1} = (b - a)/n$ とおくと

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(c_k)\Delta t, t_{k-1} < c_k < t_k$$
$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(d_k)\Delta t, t_{k-1} < d_k < t_k$$

となる c_k, d_k が存在するから，(4.13) より

$$\Delta L_k = \sqrt{\{f'(c_k)\}^2 + \{g'(d_k)\}^2}\Delta t$$

ここで，n を限りなく大きくすると，区間の分割は限りなく細かくなり，線分 $P_{k-1}P_k$ の長さの和 $\sum_{k=1}^{n} \Delta L_k$ は曲線の長さ L に限りなく近づくことが予想される．実際，定理 4.1.1 より

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\to 0}^{n} \sqrt{\{f'(c_k)\}^2 + \{g'(d_k)\}^2}\Delta t = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

よって次のことが成り立つ．

定理 4.7.1

曲線 $x = f(t), y = g(t) \quad (a \leq t \leq b)$ がそれぞれ <u>連続な導関数</u> をもつとき，長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

である．

[3] $f(t), g(t)$ が連続という条件だけではこの曲線は一般に長さをもたない．長さをもつためにはもっと強い条件が必要．

例題 4.14 $a > 0$ のとき，サイクロイド

$$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$$

の区間 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における長さを求めよ．

解

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos\theta), \quad \frac{dy}{dt} = a\sin\theta$$

であるから，求める曲線の長さを L とすると

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta d\theta} \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta} \end{aligned}$$

ここで，$2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ であり，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ で $\sin\dfrac{\theta}{2} \geq 0$ であるから

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

曲線 $y = f(x)$ は，媒介変数 (パラメータ) により

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

と表すことができる．このことから次の公式が導かれる．

定理 4.7.2

曲線 $y = f(x)$ が連続な導関数を持つとき，$a \leq x \leq b$ における長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2 dx} \end{aligned}$$

である．

4.8　不定積分の計算

現在の高校教育での積分法が不定積分に偏っており，積和の極限としての定積分の概念が極めて弱いことを指摘する人は多い．しかし，高校の数学 III の教科書が書き換えられる可能性は今のところない．

定積分の計算法を習得するには，不定積分を用いず直接定積分を計算する例を多く学ぶことも重要である．ところがこのテキストではそれに触れる余裕がほとんどない.

この節ではいろいろな関数の不定積分を計算する練習を行う．一般に不定積分の方法で身につけるべきことは次の 3 点である.

1. 積分の最も基本的な公式を理解し覚える．たとえば,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$
2. 与えられた不定積分を基本公式に変形帰着させる能力.
3. 数学公式集，たとえば森口，宇田川，一松「数学公式 I」(岩波書店) を引いて調べる能力. 実際の計算のためには公式集を引いて調べる能力を培うことは非常に重要である.

最初に，不定積分に関する公式を述べる．これらの公式は定積分の公式と基本的に同じであるが，異なるところもあるので注意しなければならない.

$$(1) \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$
$$(2) \int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$x = g(t)$ とおくと置換積分法の公式が成り立つ.

$$(3) \int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt} = \int f(g(t))g'(t)dt$$

次は部分積分法の公式である.

$$(4) \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

以下ではよく現れる不定積分をいくつかの型にまとめて整理した．扱っているものは多くの公式のほんの一部にすぎない．多くの公式をただむやみに覚えようとしてはいけない．解析入門では，とりあえず,「与えられた不定積分を基本公式に変形帰着させる能力」を培う.

4.8.1　部分積分法

例題 4.15 不定積分 $\int \log x$ を求めよ.

解

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int 1\cdot\log x dx = \int (x)'\log x dx \\ &= x\log x - \int x(\log x)'dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\log x - \int dx = x\log x - x + C\end{aligned}$$

例題 4.16 不定積分 $\int x^2 \sin x$ を求めよ.

解

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= \int (-\cos x)' x^2 dx = (-\cos x)\cdot x^2 - \int -\cos x \cdot (x^2)' dx \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2\int (\sin x)' x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x \cdot (x)' dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

このように，$\int x^n \sin x dx$ または $\int x^n \cos x dx$ の不定積分を求めるときは，部分積分法を n 回使い，x^n のベキを下げるように計算すればよい.

4.8.2 置換積分法

置換積分法の公式を逆にかくと，$x = g(t)$ のとき

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)dx$$

である．ここで，x と t を入れかえて，次の公式を得る.

$g(x) = t$ のとき

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

この公式から，$\int f(g(x))g'(x)dx$ の型の不定積分は，$g(x) = t$ とおき，不定積分 $\int f(t)dt$ を計算することで求めることができる.

例題 4.17 不定積分 $\int \sin^3 x \cos x dx$ を求めよ.

解　$\sin x = t$ とおく．両辺を x で微分して $\cos x = dt/dx$ であるから $\cos x dx = dt$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x (\sin x)' dx = \int \sin^3 x \cos x dx &= \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{4}t^4 \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x + C\end{aligned}$$

例題 4.18 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx$ を求めよ.

解　$\log x = t$ とおくいて，両辺を x で微分するすると

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \quad ゆえに \quad dt = \frac{1}{x}dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\log x}(\log x)' dx &= \int \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \int \frac{1}{t}dt = \log t \\ &= \log|\log x| + C\end{aligned}$$

例題 4.19 不定積分 $\int x\sqrt{2x-1}dx$ を求めよ．

解　これは定積分を計算する例題 4.5 と基本的には同じである．

$\sqrt{2x-1} = t$，すなわち，$x = \dfrac{t^2+1}{2}$ とおいて両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = t \quad \text{ゆえに} \quad dx = tdt$$

したがって

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-1}dx &= \int \frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot tdt \\ &= \frac{1}{2}\int (t^4+t^2)dt = \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3 \\ &= \frac{1}{10}(2x-1)^2\sqrt{2x-1} + \frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

4.8.3　有理関数の不定積分

有理関数　$f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-x}$ の不定積分を求めてみよう．まず分子の次数を分母の次数より小さくしてから**部分分数** (partial fraction) に分解する．

$$\begin{aligned}\frac{x^4+1}{x^3-x} &= \frac{x^4-x^2+x^2+1}{x(x^2-1))} = \frac{x^2(x^2-1)+x^2+1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= x + \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

そこで

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

と変形されるから，x についての**恒等式** (identity) $x^2+1 = a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1)$ が得られる．係数を比べて，

$$\begin{aligned}a+b+c &= 1 \\ b-c &= 0 \\ -a &= 1\end{aligned}$$

これを解いて，$a = -1, b = c = 1$.

$$\frac{x^4}{x^3-x} = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

したがって

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x}dx = \frac{1}{2}x^2 - \log|x| + \log|x-1| + \log|x+1| = \frac{1}{2}x^2 + \log\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + C.$$

部分分数分解 (decomposition into prtial fractions)

(1) 一般に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が互いに異なる実数で，$f(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式なら，

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

という分解ができる．ここで $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は定数である．

(2) 分母に $(x-a)^k \quad (k>1)$ の形があるときは，上のようには分解できないが，この項から

$$\frac{C_1}{(x-a)^k} + \frac{C_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{C_k}{(x-a)}$$

の形の分解が現れる．ここで $C_1, C_2, \cdots, C_k$ は定数である．

(3) 分母に $ax^2+bx+c, \quad D = b^2-4ac < 0$ のように，分母が 1 次式の積に分解できない項が現れるときは 2 次式のまま扱う．

例 4.4

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x-1)^3} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+f}{x^2+x+1}$$

という分解ができる．定数 a, b, c, d, e, f を定めればよい．

例題 4.20 $\dfrac{x^5+1}{x^3+x}$ の不定積分を求めよ．

解　まず分子の次数を分子の次数より小さくしてから部分分数に分解する．

$$\frac{x^5+1}{x^3+x} = x^2 - 1 + \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

だから

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

と部分分数に分解されるから，x に関する恒等式 $x+1 = a(x^2+1) + x(bx+c)$ をえる．係数を比べて

$$a+b=0$$
$$c=1$$
$$a=1$$

これを解いて　$a=1, b=-1, c=1$．だから

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

したがって

$$\int \frac{x^5+1}{x(x^2+1)}dx = \frac{1}{3}x^3 - x\log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，右辺第 5 項の不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx$ を計算法しなければならない．例題 4.7 では定積分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$ を置換積分の公式を用いて計算した．しかしここでは直接不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx$ を計算しなければならない．残念ながら，この不定積分は我々がいままで習った初等関数で表すことができない．そこで，この不定積分を表す関数 (arctan x) を学ぶまでここのままにしておく．

逆三角関数 arctan x を認めれば次の重要な定理を証明できる．

> **定理 4.8.1**
> 有理関数の不定積分は次の型の関数の 1 次結合で表される．
> (1) 有理関数　(2)arctan x　(3)log $|ax^2 + bx + c|$

4.8.4　無理関数の不定積分

無理関数の不定積分は一般に初等関数で表されないが，特別な形のものは有理関数の不定積分に帰着される．ここでは，1 次無理関数の不定積分を扱う．以下 $R(x, y)$ は 2 変数の有理関数を表す．2 次無理関数を含む一般の場合は公式集を参照されたい．

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$　(m は正の整数, $ad \neq bc$).

$t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおくと，$x = \dfrac{dt^m - b}{-ct^m + a}$ によって有理化される．すなわち

$$I = \int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^m - b}{-ct^m + a}, t\right)\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(ct^m - a)^2}dt.$$

(2) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$　(m, n は正の整数, $ad \neq bc$). この積分を求めるには，p を n, m の最小公倍数とし

$$t = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

とおくと t に関する有理関数の不定積分に変形帰着される．

例題 4.21 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x}}dx$ を求めよ．

解　$t = \sqrt[6]{x}$ とおくと $x = t^6$. 両辺を t で微分して $dx/dt = 6t^5$ だから $dx = 6t^5dt$ ゆえに

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x}}dx &= \int \frac{1}{t^3 + t^2}6t^5dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{(t^3+1) - 1}{t+1}dt \\ &= 6\int (t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{6}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 + 6t - 6\log(t+1) \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log(\sqrt[6]{x} + 1) + C.\end{aligned}$$

4.9　逆三角関数で表される不定積分

この節では，有理関数の不定積分に関する定理 4.8.1 を補足する立場から逆三角関数を導入する．三角関数及び逆三角関数は複素領域まで定義域を拡張して初めて本質的な理解が得られる．逆三角関数は本質的に多値関数になるので**主値** (principal value) と呼ばれる値に制限して考えれば実数の範囲でも問題なく取り扱える．

4.9.1　逆三角関数

$y = \arcsin x$ **逆正接関数**

三角関数は弧 x が与えられた時に $\sin x, \cos x, \tan x$ を定めるものであった．**逆三角関数** (inverse trigonometrical function) は，弧 x を $\sin x, \cos x, \tan x$ の関数として定めるものである．すなわち，x を三角形の対辺の長さとすると，$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ は対応する弧の長さとして定義される．

$y = \sin x$ のグラフにおいて定義域は $(-\infty, \infty)$ ，値域は $[-1, 1]$ である．しかし，区間 $(-\infty, \infty)$ で 1:1 でないから，1:1 となる区間に定義域を限れば，その区間で逆関数を考えることができる．$y = \sin x$ は区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ で単調増加で連続な 1:1 関数であるから逆関数が存在する．この関数を**逆正弦関数** (inverse sine, arcsine) といい，記号 arcsin または $\sin^{-1}$ で表す．このテキストでは arcsin を使うので $x = \arcsin y$ とかくことにする．ここでは x と y を入れ替えて通常の関数と同じく，x を独立変数 y を従属変数とすると，$y = \arcsin x$ となる．これは区間 $[-1, 1]$ を定義域，区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ を値域とする単調増加で連続な関数である (図 4.14 参照).

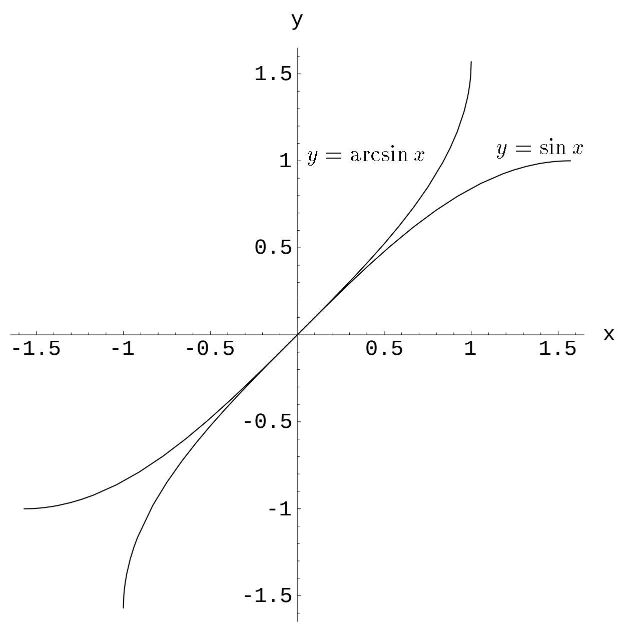

図 4.14: 逆正弦関数は $y = \sin x \quad (-\pi/2, \pi/2)$ を $y = x$ に関して対称変換して得られる．

例題 4.22 次の逆正弦関数の値を求めよ．
(1) $\arcsin \dfrac{1}{2}$,　(2) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

解　(1) $y = \arcsin \dfrac{1}{2}$ とおくと $\sin y = \dfrac{1}{2} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ ゆえに $y = \pi/6$
(2) $y = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ ゆえに $y = -\pi/4$

$y = \arccos x$ **逆余弦関数**

$y = \cos x$ は定義域 $(-\infty, \infty)$ で 1:1 の関数でないので定義域を区間 $[0, \pi]$ に制限して考えよう．この範囲でグラフは単調に減少し，値域はもとと同じ $[-1, 1]$ である．したがって逆関数が存在する．これを**逆余弦関数** (inverse cosine, arccosine) といい，$y = \arccos y$ で表す．ここでは x と y を入れ替

えて通常の関数と同じく，x を独立変数 y を従属変数とすると，$y = \arccos x$ となる．これは区間 $[-1, 1]$ を定義域，区間 $[0, \pi]$ を値域とする単調減少で連続な関数である (図 4.15 参照).

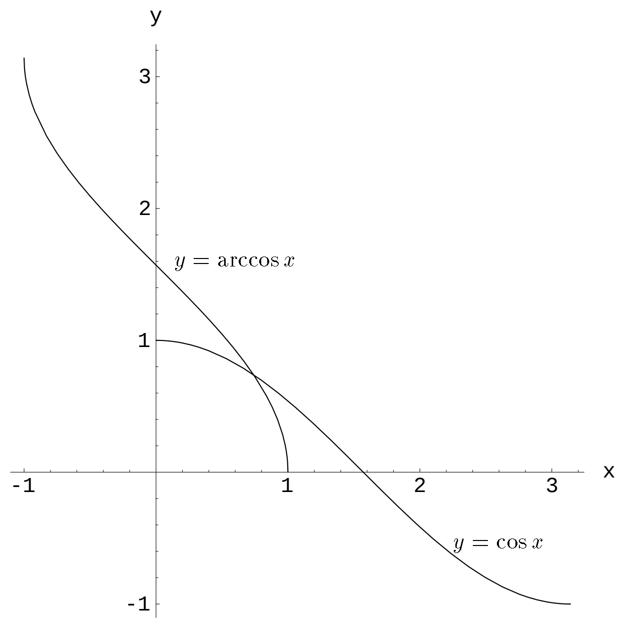

図 4.15: 逆余弦関数は $y = \cos x \quad (0, \pi)$ を $y = x$ に関して対称変換して得られる.

例題 4.23 $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ を示せ.

解 $\arcsin x = y$ とおくと $-\pi/2 \leq y \leq -\pi/2$ で，$x = \sin y$．ところで，$\cos(\pi/2 - y) = \sin y = x$ であって，$0 \leq y \leq \pi/2$．よって逆余弦関数の定義から $\pi/2 - y = \arccos x$ である．ゆえに，$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ が示された.

例題 4.24 次の逆余弦関数の値を求めよ.

(1) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $\arccos 0$

解 (1) $y = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと $\cos y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (0 \leq y \leq \pi)$ ゆえに $y = \dfrac{3\pi}{4}$

(2) $y = \arccos 0$ とおくと $\cos y = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi)$ ゆえに $y = \pi/2$

$y = \arctan x$ **逆正接関数**

$y = \tan x$ のグラフは多くの不連続点を持つ．その中で，開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ を考えると，$\displaystyle\lim_{x \to -\pi/2+0} \tan x = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x \to \pi/2-0} \tan x = \infty$．したがってこの範囲でグラフは単調増加で，値域はもとと同じで $(-\infty, \infty)$ である．したって逆関数が存在しする．これを**逆正接関数** (inverse tangent, arctangent) といい，$x = \arctan y$ で表す．ここでは x と y を入れ替えて通常の関数と同じく，x を独立変数 y を従属変数とすると，$y = \arctan x$ となる．これは区間 $(-\infty, \infty)$ を定義域，区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ を値域とする単調増加で連続な関数である (図 4.16 参照).

注意 4.1 逆三角関数を $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ とかくテキストも多い．このとき $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆数 $\dfrac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}, \dfrac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}, \dfrac{1}{\tan x} = (\tan x)^{-1}$ と混同してはならない．逆数と逆関数を同じ記号で表さないことで間違いを防げる.

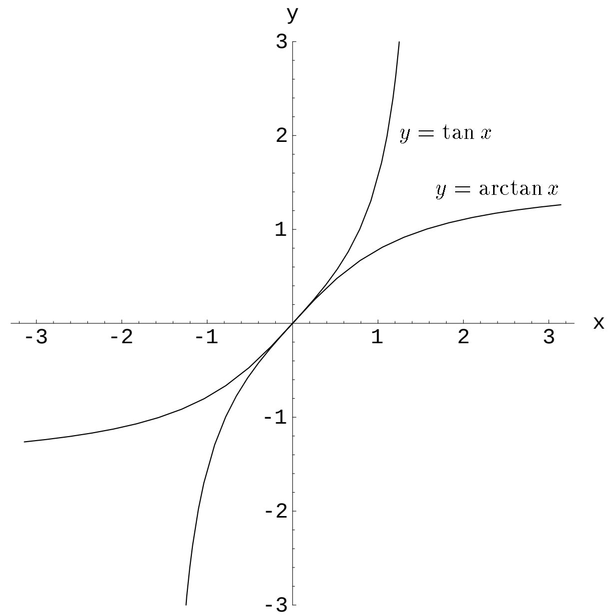

図 4.16: 逆正接関数は $y = \tan x \quad (-\pi/2, \pi/2)$ を $y = x$ に関して対称変換して得られる.

例題 4.25 次の逆正弦関数の値を求めよ.
(1) $\arctan 1$ (2) $\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

解 $y = \arctan 1$ とおくと $\tan y = 1 \quad (-\pi/2, \pi/2)$ ゆえに $y = \dfrac{\pi}{4}$
(2) $y = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とおくと $\tan y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad (-\pi/2, \pi/2)$ ゆえに $y = -\dfrac{\pi}{3}$

4.9.2 逆三角関数の微分公式

この節では逆関数の微分公式 (3.8) の応用として，逆三角関数の微分公式を導く.

定理 4.9.1 (逆三角関数の微分公式)
逆三角関数については次の微分公式が成り立つ.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1) \tag{4.14}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1) \tag{4.15}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{4.16}$$

証明
$y = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$ のとき，$-\pi/2 < y < \pi/2$ で $x = \sin y$ である.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

$-\pi/2 < y < \pi/2$ では $\cos y > 0$ であるから，$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．ゆえに，

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \pm\pi/2$ のとき，つまり $x = \pm 1$ のとき分母がゼロになるのでこのときは導関数は存在しない．

同様に，$y = \arccos x \quad (-1 < x < 1)$ のとき，$0 < y < \pi$ で $x = \cos y$ である．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\cos y}{dy}} = \frac{1}{-\sin y}$$

$0 < y < \pi$ では $\sin y > 0$ であるから，$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．

ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = 0, \pi$ のとき，すなわち $x = \pm 1$ のとき，分母が 0 となり微分不可能となる．

$y = \arctan x$ については，$(-\infty, \infty)$ のとき，$x = \tan y$ である．ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\tan y}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

例題 4.26 $y = \arcsin(2x-1) \quad (0 < x < 1)$ を微分せよ．

解　$u = 2x-1$ おくと, $y = \arcsin u$ である．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\arcsin u)'(2x-1)' = 2\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 2\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

4.9.3　逆三角関数で表される不定積分

定理 4.9.1 と微分積分学の基本定理 4.2.1 から次の積分に関する基本公式が得られる．

定理 4.9.2 (逆三角関数で表される不定積分)
次の積分公式が成り立つ．

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1) \tag{4.17}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4.18}$$

$(\arcsin x)'$ と $(\arccos x)'$ はマイナスの符号だけの違いだけなので

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x + C \quad (-1 < x < 1)$$

ともかける．

例題 4.27 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{a} \sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0)$

解　(1) $t = \cos x$ とおく．両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \quad ゆえに \quad dt = -\sin x dx$$

また

t	$1 \quad \to \quad -1$
x	$0 \quad \to \quad \pi$

だから，置換積分法を用いて

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(2) この問題は置換積分法を使っても解けるが, ここでは部分積分法を用いて解いてみよう.

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^a (x)' \sqrt{a^2-x^2}dx &= \left[x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a - \int_0^a x(\sqrt{a^2-x^2})'dx \\ &= -\int_0^a x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int_0^a \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a \\ &= -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ は円の面積の 4 分の 1 を表すからその値は当然 $\pi a^2/4$ である.